পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ্ কর্তৃক নবম ও দশম শ্রেণীর জন্য অনুমোদিত নূতন সিলেবাস অনুযায়ী ঐচ্ছিক বিষয়রূপে লিখিত।

[*Vide Board's Curriculum & Syllabus Vol. II, dated May, 1974*]

মাধ্যমিক

ঐচ্ছিক গণিত

[SECONDARY ADDITIONAL MATHEMATICS]

● নবম ও দশম শ্রেণীর জন্য ●

শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

অবসরপ্রাপ্ত প্রধান শিক্ষক, মিত্র ইন্‌ষ্টিট্যুশন্ (ভবানীপুর), গ্রন্থকার, আধুনিক গণিত (৭ম) ও (৮ম) ও নব পাটীগণিত (৬ষ্ঠ), S. F. Addl. Math., পাটীগণিত ও বীজগণিত (IX) & (X), জ্যামিতি ও পরিমিতি (IX), জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি (X), Arithmetic & Algebra (IX) & (X), Geometry & Mensuration (IX), Geometry, Mensuration & Trigonometry (X), Modern Math. (VII) & (VIII.)

ক্যালকাটা বুক হাউস

১/১, বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট : কলিকাতা-১২

প্রকাশক :

শ্রীপরেশচন্দ্র ভাওয়াল
ক্যালকাটা বুক হাউস
১/১, বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট
কলিকাতা-১২

মে : ১৯৭৬

মূল্য— নয় টাকা পঞ্চাশ পয়সা

মুদ্রাকর : শ্রীনিরঞ্জন দাস, দাস প্রিণ্টার্স, ১৭, বুদ্ধু ওস্তাগর লেন, কলিকাতা-৯
ও শ্রীপবিত্রলাল দত্ত, প্রিণ্টোগ্রাফ, ১০১, বৈঠকখানা রোড, কলিকাতা-৯

ADDITIONAL MATHEMATICS

Distribution of Marks :

1.	Algebra ...	... 35 marks
2.	Geometry ..	... 30 marks
3.	Trigonometry ...	... 20 marks
4.	Solid Geometry and Mensuration	... 15 marks
	Total ...	... 100 marks

SYLLABUS

CLASS IX

Algebra :

The Remainder Theorem, Divisibility (factor theorem) ; Harder Factors, Laws of Indices (formal proofs for fractional and negative Indices not being required) ; Surds ; Involutions and Evolutions ; Simple Simultaneous Equations and Problems with two or more variables ; Quadratic Equations ; Graphical Solutions.

Geometry :

To prove :—

In an obtuse-angled triangle, the square on the side subtending the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

In every triangle the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

If a straight line is drawn parallel to one side of a triangle the other two sides are divided proportionally and the converse.

প্রকাশক :
শ্রীপরেশচন্দ্র ভাওয়াল
ক্যালকাটা বুক হাউস
১/১, বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট
কলিকাতা-১২

মে : ১৯৭৬

মূল্য—নয় টাকা পঞ্চাশ পয়সা

মুদ্রাকর : শ্রীনিরঞ্জন দাস, দাস প্রিণ্টার্স, ১৭, বুদ্ধু ওস্তাগর লেন, কলিকাতা-৯
ও শ্রীপবিত্রলাল দত্ত, প্রিণ্টোগ্রাফ, ১০১, বৈঠকখানা রোড, কলিকাতা-৯

ADDITIONAL MATHEMATICS

Distribution of Marks :

1. Algebra	...	... 35 marks
2. Geometry	..	... 30 marks
3. Trigonometry	...	... 20 marks
4. Solid Geometry and Mensuration		... 15 marks
Total	...	... 100 marks

SYLLABUS

CLASS IX

Algebra :

The Remainder Theorem, Divisibility (factor theorem) ; Harder Factors, Laws of Indices (formal proofs for fractional and negative Indices not being required) ; Surds ; Involutions and Evolutions ; Simple Simultaneous Equations and Problems with two or more variables ; Quadratic Equations ; Graphical Solutions.

Geometry :

To prove :—

In an obtuse-angled triangle, the square on the side subtending the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

In every triangle the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

If a straight line is drawn parallel to one side of a triangle the other two sides are divided proportionally and the converse.

If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional and the converse.

If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other and the sides about these equal angles proportional, the triangles are similar.

The internal bisector of an angle of a triangle divides the opposite side internally in the ratio of the sides containing the angle and likewise the external bisector externally.

If a perpendicular is drawn from the right angle of a right-angled triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to one another.

The ratio of the areas of similar triangles is equal to the ratio of the squares on the corresponding sides.

Trigonometry :

Measurement of angles in degrees, minutes and seconds and in radians. Definition of trigonometrical ratio of an acute angle. Trigonometrical ratios of the standard angles 0°, 30°, 45°, 60°, 90° (undefined values such as tan 90°, cot 0° to be excluded). Simple identities connecting the ratios of an angle immediately derivable from a right-angled triangle. Trigonometrical ratios of complementary angles.

Easy problems on heights and distances reducible to the solution of right-angled triangles involving the standard angles above.

CLASS X

Algebra ;

Elementary ideas of elimination ; A. P. and G. P. (finite series), H. P. (definition only) ; Logarithms (Note—Use of slide rule may be encouraged).

Simultaneous equations in two unknowns of which one is quadratic and the other linear.

Geometry :

Theoretical :

The angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

If two chords of a circle intersect either inside or outside the circle, the rectangle contained by the parts of one is equal to the rectangle contained by the parts of the other. (Note—This proposition may be proved with the help of the properties of similar triangles).

Practical :

Construction of tangents to a circle and of common tangents to two circles (both cases). Construction of regular figures of 3, 4, 5 or 6 sides in or about a circle.

Construction of a mean proportional to two given straight lines.

Construction of a square equal in area to a given polygon.

Solid Geometry :

Axioms (i). One and only one plane may be made to pass through any two intersecting straight lines.

Axioms (ii). Two intersecting planes cut one another in a straight line and in no point outside it.

To prove—

1. If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is also perpendicular to the plane in which they lie.

2. All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are coplanar.

3. If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, then the other is also perpendicular to the plane.

Concept to angle between two planes and angle between a straight line and a plane. Concept of parallelism of planes. Concept of a line being parallel to a plane. Concept of skew lines.

Mensuration :

Parallelopipeds, Right Circular Cones, Prisms and Pyramids (Expressions, without proof, of the surfaces and volumes of these solids).

Note :—It is recommended that Solid Geometry and Mensuration of Solids be taught through the drawing board, and the making and handling of solid models.

CONTENTS

CLASS IX

ALGEBRA

Subjects		Pages
1.	Involution	1
2.	Harder Factors	7
3.	Remainder Theorem & Divisibility (Factor Theorem)	15
4.	Simultaneous Equations	25
5.	Problems on Equations	33
6.	Theory of Indices	42
7.	Surds	53
8.	Evolution (Square & Cube root)... ...	61
9.	Quadratic Equations.	77
10.	Problems on Quadratic Equations ...	90
11.	Graphs & Graphical Solutions	94

GEOMETRY

1.	Projection & Theorems on Projection ...	110
2.	Ratio & Proportion	117
3.	Theorems	119
4.	Problems	125

TRIGONOMETRY

1.	Measurement of Angles (Different systems) ...	153
2.	Trigonometrical Ratios	166
3.	Identities	169
4.	Trigonometrical Ratios of Standard Angles ...	177
5.	Ratios of Complementary Angles ...	183
6.	Elimination ...	187
7.	Height and Distance	191
8.	Answers :	
	Algebra	199
	Trigonometry	206

CLASS X

MENSURATION

Subjects		*Pages*
1. Parallelopiped	... ...	209
2. Prisms	... ...	213
3. Pyramid	... ...	215
4. Circular cylinder	... ...	220
5. Cone	... ...	225
6. Sphere	... ...	229

ALGEBRA

1. Elimination	... ...	235
2. Arithmetical Progression	... ...	241
3. Geometrical Progression	... ...	266
4. Harmonic Progression	... ...	284
5. Simultaneous Quadratic Equations	...	285
6. Logarithm	... ...	290

GEOMETRY & SOLID GEOMETRY

1. Theorems	... ...	304
2. Construction of Tangents	... ...	313
3. Construction of regular figures in or about a circle	... ...	316
4. Problems	....	320
5. Construction of Circles	... ...	324
6. Some Theorems & Problems	....	331
7. Solid Geometry	... ...	338
Answers	... ...	353
S. F. Questions	... ...	1—17
Log tables	... ...	1—4

নবম শ্রেণী

ALGEBRA (বীজগণিত)

Involution (শক্তি-উন্নয়ন বা ঘাত নির্ণয়)

1. ঘাত বা শক্তি। কোন সংখ্যা বা রাশিকে এক বা একাধিক বার লইয়া গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায়, সেই গুণফলকে ঐ সংখ্যা বা রাশির ঘাত বা শক্তি (power) বলে। যথা—

দৃষ্টান্ত (i) 3কে একবার লইলে (গুণফল) হয় 3 ; 3কে দুইবার লইয়া গুণ করিলে গুণফল হয় $3\times3=9$; 3কে যে দুইবার লওয়া হইয়াছে, উহা বুঝাইবার জন্য 3^2 লেখা যায়। অনুরূপে 3^3এর অর্থ $3\times3\times3=27$.

দৃষ্টান্ত (ii)
$$(a)^1=a$$
$$(a)^2=a\times a=a^2$$
$$(a)^3=a\times a\times a=a^3, \cdots$$

উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে বুঝা গেল যে, কোন সংখ্যাকে একবার লইয়া গুণ করিলে গুণফল সেই সংখ্যাই হয়, সুতরাং কোন সংখ্যার প্রথম ঘাত সেই সংখ্যাটিই হয়। $(a)^2$ লেখা থাকিলে বুঝিতে হইবে a সংখ্যাটিকে দুইবার লইয়া গুণ করিতে অর্থাৎ উহার **দ্বিঘাত** নির্ণয় করিতে হইবে। অনুরূপে $(a)^3$ বলিলে aকে 3বার লইয়া গুণফল বা a-র **ত্রিঘাত** নির্ণয় করিতে হইবে। যদি aকে n সংখ্যক বার লইয়া গুণ করা হয়, তবে সেই গুণফলকে a-র n-তম ঘাত বলে, অর্থাৎ $(a)^n=a\times a\times a\times \cdots\cdots n$ বার $=a^n$.

কোন সংখ্যা বা রাশির ঘাত বা শক্তি নির্ণয় করাকে উহার **শক্তি-উন্নয়ন** বা **ঘাত নির্ণয়** বা **উদ্‌ঘাতন** (Involution) বলে।

কোন সংখ্যা বা রাশিকে কয়বার লইয়া গুণ করিতে অর্থাৎ উহাকে কোন্ ঘাতে উন্নীত করিতে হইবে, তাহা যে সংখ্যা দ্বারা সূচিত হয়, তাহাকে ঘাতের সূচক (Index) বলে। যথা, $(a)^3$এর 3টিকে ঘাতের সূচক বলে। সূচক চিহ্ন 1-কে লিখিতে হয় না, সুতরাং $a=(a)^1=a$. $(a)^m$এর m-কে ঘাতের সূচক বুঝিবে।

কোন রাশিকে সূচক-নির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত করিলে যে রাশিমালা পাওয়া যায় তাহাকে ঐ রাশির **বিস্তৃতি** (Expansion) বলে।

2. গুণফলের চিহ্ন বিষয়ক নিয়ম (Rule of signs) হইতে তোমরা জান যে,—

(i) যে-কোন সংখ্যার **যুগ্ম ঘাত** (even power) ধনাত্মক (positive) হইবে। যথা,

(a) $(+x)^2=x\times x=x^2$,
$(-x)^2=-x\times -x=x^2$,
$(-a)^4=-a\times -a\times -a\times -a=a^4$ ইত্যাদি।

আর (ii) ঘাতটি যদি অযুগ্ম (odd) হয়, তবে সংখ্যাটি ধনাত্মক হইলে ঘাতটিও ধনাত্মক হইবে এবং সংখ্যাটি ঋণাত্মক হইলে ঘাতটিও ঋণাত্মক হইবে। অতএব, অযুগ্ম ঘাতের চিহ্ন সংখ্যাটির চিহ্নবিশিষ্ট হইয়া থাকে। যথা,

$$(+3)^3=3\times3\times3=27.$$
$$(-3a)^3=-3a\times-3a\times-3a=-27a^3.$$
$$(-x)^5=-x\times-x\times-x\times-x\times-x=-x^5 \text{ ইত্যাদি।}$$

3. ঘাত নির্ণয়। উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে একপদীয় রাশির ঘাত নির্ণয়ের নিয়ম হইল :—

(i) প্রদত্ত পদের সহগটিকে নির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত করিয়া তাহার পূর্বে নিয়মানুসারে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন দিবে।

(ii) তারপর পদটির প্রত্যেক উৎপাদকের সূচককে যে ঘাতে উন্নীত করিতে হইবে তাহা দ্বারা গুণ করিয়া বসাইবে।

উদা. 1. $(2a^2)^4=2^4.(a^2)^4=16a^8,$

$$(-2a^3b)^2=(-2)^2.(a^3)^2.(b)^2=4a^6b^2,$$
$$(-3x^2y^3)^3=(-3)^3.(x^2)^3.(y^3)^3=-27x^6y^9.$$
$$\left(\frac{2ab^2}{5x^2y^3}\right)^3=\frac{8a^3b^6}{125x^6y^9}.$$

4. রাশির ঘাত নির্ণয়। গুণন প্রক্রিয়া হইতে দেখা যায় যে,

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)\times(a+b)=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2&=(a-b)\times(a-b)=a^2-2ab+b^2\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}(a+b)^4&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a-b)^4&=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}(a+b)^5&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\(a-b)^5&=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5\end{aligned}\right\}$$

উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে দ্বিপদ রাশির ঘাত নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত নিয়ম করা যায়—

মনে কর, রাশির প্রথম পদ a এবং দ্বিতীয় পদ b দেওয়া আছে।

(i) দ্বিপদ রাশিকে কোন ঘাতে উন্নীত করিলে লব্ধরাশিমালার পদসংখ্যা উহার ঘাত-সূচক সংখ্যা অপেক্ষা এক বেশী হইবে। যথা, দ্বিঘাতের বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 3, ত্রিঘাতের বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 4, ইত্যাদি।

(ii) দ্বিপদ রাশিটির ঘাতে যে সূচক আছে, উহার প্রথম পদ a এবং দ্বিতীয় পদ bকে সেই ঘাতবিশিষ্ট করিলে বিস্তৃতির যথাক্রমে প্রথম ও শেষ পদ হইবে। যথা, $(a+b)^5$এর বিস্তৃতির প্রথম পদ a^5 এবং শেষ পদ b^5.

(iii) বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি অন্যান্য যে কোন পদে a-এর ঘাত উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের a-র ঘাত অপেক্ষা এক কম এবং b-এর ঘাত পূর্ব পদটির b-র ঘাত অপেক্ষা এক বেশী হইবে।

(iv) বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি যে কোন পদের সাংখ্য-সহগ নির্ণয়ের নিয়ম এই যে, যে পদের সহগ নির্ণয় করিতে হইবে তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের সহগের সহিত a-এর ঘাতের সূচকের গুণফলকে পূর্বে যতগুলি পদ আছে সেই পদসংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে লব্ধ ভাগফল হইবে নির্ণেয় সহগ।

(v) $a+b$ এবং $a-b$ এইরূপ রাশিদ্বয়কে একই ঘাতে উন্নীত করিলে উহাদের দুইটি বিস্তৃতির পার্থক্য এই হয় যে, প্রথম বিস্তৃতির সব পদই ধনাত্মক হয়, কিন্তু দ্বিতীয় বিস্তৃতির প্রথম পদ ধনাত্মক, দ্বিতীয় পদ ঋণাত্মক। এইরূপ একান্তরভাবে পদগুলি ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হইয়া থাকে। (পূর্ব-পৃষ্ঠার দৃষ্টান্তগুলি দেখ।)

(vi) যে কোন বিস্তৃতিতে প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সাংখ্য সহগ দুইটি সমান হয়।

নিম্নের উদাহরণগুলিতে পূর্বোক্ত নিয়মগুলি মিলাইয়া লও।

উদাহরণমালা 1

উদা. 1. Expand $(a+b)^6$ অর্থাৎ $(a+b)^6$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে ঘাতের সূচক 6, সুতরাং বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা হইবে 7. বিস্তৃতির প্রথম পদ হইবে a^6.

উহার দ্বিতীয় পদের সহগ নির্ণয়ের জন্য প্রথমে পূর্বপদ a^6-এর সূচক 6 ও সহগ 1-এর গুণফল 6-কে পূর্বে 1টি পদ থাকায় 1 দ্বারা ভাগ করিয়া হইল 6, সুতরাং দ্বিতীয় পদের সাংখ্য-সহগ 6 হইবে। অতএব, বিস্তৃতির দ্বিতীয় পদ হইবে $6a^5b$. অনুরূপে,

তৃতীয় পদ হইবে $\frac{6\times5}{2}a^4b^2=15a^4b^2$। [আগে 2টি পদ থাকায় 2 দিয়া ভাগ হইল]

চতুর্থ পদ $=\frac{15\times4}{3}a^3b^3=20a^3b^3$ [আগে 3টি পদ থাকায় 3 দিয়া ভাগ হইল]

পঞ্চম পদ $=\frac{20\times3}{4}a^2b^4=15a^2b^4$

ষষ্ঠ পদ $=\frac{15\times2}{5}ab^5=6ab^5$

সপ্তম বা শেষ পদ $=\frac{6\times1}{6}b^6=b^6$.

$$\therefore\quad (a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

[**দ্রষ্টব্য :** পূর্বে বলা হইয়াছে যে, কোন বিস্তৃতিতে প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সাংখ্য-সহগ দুইটি সমান হয়। উপরের উদাহরণে চতুর্থ পদের পূর্বে 3টি পদ হইয়াছে এবং উহার পরে 3টি পদ হইবে ; সুতরাং চতুর্থ পদটি নির্ণয় করার পর উহার পরবর্তী পদ তিনটি সহজেই উক্ত নিয়মানুসারে নির্ণয় করা যায়। এখানে পঞ্চম পদের সহগ আর করিয়া নির্ণয় না করিয়া সহজেই ধরা যায় যে উহার সাংখ্য-সহগ তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগের সমান হইবে।]

উদা. 2. $(x-y)^7$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা $=8$.

অতএব, বিস্তৃতির প্রথম পদ $=x^7$,

দ্বিতীয় পদ $=\frac{7\times1}{1}x^6(-y)=-7x^6y$

তৃতীয় পদ $=\frac{7\times6}{2}x^5(-y)^2=21x^5y^2$

চতুর্থ পদ $=\frac{21\times5}{3}x^4(-y)^3=-35x^4y^3$

পঞ্চম পদ $=\frac{35\times4}{4}x^3(-y)^4=35x^3y^4$

ষষ্ঠ পদ $=\frac{35\times3}{5}x^2(-y)^5=-21x^2y^5$

সপ্তম পদ $=\frac{21\times2}{6}x(-y)^6=7xy^6$

শেষ পদ $=\frac{7\times1}{7}(-y)^7=-y^7$

$$\therefore\ (x-y)^7=x^7-7x^6y+21x^5y^2-35x^4y^3+35x^3y^4-21x^2y^5+7xy^6-y^7.$$

উদা. 3. $(2a+b)^5$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা হইবে 6.

বিস্তৃতির প্রথম পদ $=(2a)^5=32a^5$

দ্বিতীয় পদ $=5.(2a)^4b=80a^4b$

তৃতীয় পদ $=\frac{5\times4}{2}(2a)^3b^2=80a^3b^2$

চতুর্থ পদ $=\frac{10\times3}{3}(2a)^2b^3=40a^2b^3$

পঞ্চম পদ $=\frac{10\times2}{4}(2a)b^4=10ab^4$

ষষ্ঠ পদ বা শেষ পদ $=\frac{5\times1}{5}b^5=b^5$.

$$\therefore\ (2a+b)^5=32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3+10ab^4+b^5.$$

উদা. 4. $(1-x)^6$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতিতে মোট 7টি পদসংখ্যা থাকিবে।

বিস্তৃতির প্রথম পদ $=(1)^6=1$

দ্বিতীয় পদ $=6.(1)^5(-x)=-6x$

তৃতীয় পদ $=\frac{6\times5}{2}(1)^4.(-x)^2=15x^2$

চতুর্থ পদ $=\frac{15\times4}{3}(1)^3.(-x)^3=-20x^3$

এখানে পরবর্তী তিনটি পদের সাংখ্য-সহগ হইবে যথাক্রমে তৃতীয়, দ্বিতীয় ও প্রথম পদের সাংখ্য-সহগের সমান।

$\therefore$ পরবর্তী পদত্রয় হইবে $15x^4$, $-6x^5$ এবং x^6,

$$\therefore\ (1-x)^6=1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6.$$

উদা. 5. $(2a-3b)^5$এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা $=6$.

বিস্তৃতির প্রথম পদ $=(2a)^5=32a^5$

দ্বিতীয় পদ $=5(2a)^4(-3b)=-240a^4b$

তৃতীয় পদ $=\frac{5\times 4}{2}(2a)^3(-3b)^2=10(2a)^3(-3b)^2=720a^3b^2$

চতুর্থ পদ $=10(2a)^2(-3b)^3=-1080a^2b^3$

পঞ্চম পদ $=5(2a)(-3b)^4=810ab^4$

শেষ পদ $=(-3b)^5=-243b^5$.

$\therefore\ (2a-3b)^5=32a^5-240a^4b+720a^3b^2-1080a^2b^3+810ab^4-243b^5$.

[**দ্রষ্টব্য : বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদগুলির সাংখ্য-সহগ সমান হয় বলিয়া উপরের উদাহরণে প্রথম তিনটি পদের সাংখ্য-সহগ দেখিয়া চতুর্থ, পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদের সাংখ্য-সহগ লেখা হইয়াছে।**]

উদা. 6. $a=3$ হইলে $a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a-63$এর মান কত হইবে ?

প্রদত্ত রাশি $=(a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1)-64$
$=(a-1)^6-64=(3-1)^6-64=(2)^6-64=64-64=0$.

[এখানে পর পর পদগুলির সাংখ্য-সহগ দেখিয়া স্থির করা যায় যে প্রথম ছয় পদের সহিত সপ্তম পদ 1 লইলে 7টি পদ মিলিয়া $(a-1)^6$এর বিস্তৃতির সমান হইবে।

$\therefore\ -63=1-64$ এইরূপ ধরা হইয়াছে।]

উদা. 7. $(x+y)^5$এর বিস্তৃতিতে সাংখ্য-সহগগুলির সমষ্টি কত ?

বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা $=6$

$\because\ (x+y)^5=x^5+5x^4y+\frac{5\times 4}{2}x^3y^2+\frac{10\times 3}{3}x^2y^3+\frac{10\times 2}{4}xy^4+y^5$,

$\therefore$ পদগুলির সাংখ্য-সহগসমূহের যোগফল $=1+5+10+10+5+1=32$.

[**সহজ নিয়ম :**] এখানে x ও yএর সহগ 1 এবং 1এর যে কোন ঘাতও 1 হয়। $\therefore$ বিস্তৃতির পদগুলিতে $x=1$ ও $y=1$ বসাইলে প্রত্যেক পদ উহারই সহগে পরিণত হইবে অর্থাৎ সহগের সমান হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সহগগুলির সমষ্টি $=(1+1)^5=(2)^5=32$.

উদা. 8. $(a+b+2)^4$এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$(a+b+2)^4=\{(a+b)+2\}^4$
$=(a+b)^4+4(a+b)^3.2+6(a+b)^2.2^2+4(a+b).2^3+(2)^4$
$=(a+b)^4+8(a+b)^3+24(a+b)^2+32(a+b)+16$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+8(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$$
$$+24(a^2+2ab+b^2)+32a+32b+16$$
$$=a^4+4a^3b+8a^3+6a^2b^2+24a^2b+24a^2+4ab^3+24ab^2$$
$$+48ab+24b^2+8b^3+b^4+32a+32b+16.$$

Exercise 1

নির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত কর :—

1. (i) $(-2a^3b^2)^5$ (ii) $(-3x^2y^3)^6$ (iii) $\left(-\dfrac{ab^2}{2x^2y}\right)^5$ (iv) $(a+b)^5$

2. $(a+1)^6$ 3. $(x+y)^7$ 4. $(1+2a)^4$ 5. $(a-2)^5$

6. $(x-y)^5$ 7. $(x-1)^6$ 8. $(2a-1)^5$.

বিস্তৃতি নির্ণয় কর :—

9. $(3-c)^6$ 10. $(2a+b)^5$ 11. $(2x-3y)^5$ 12. $(3a+2b)^5$

13. $(a+1)^3$ 14. $(x-1)^9$ 15. $(a^2+1)^6$ 16. $(x^2+1)^5$

17. $(a^2-b^2)^4$ 18. $(1-a^2)^6$ 19. $(x-y+z)^3$ 20. $(a+b-2)^4$

নিম্ন বিস্তৃতিগুলির পদসমূহের সাংখ্য-সহগগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :—

21. $(a+b)^6$ 22. $(x+y)^5$ 23. $(x+b)^7$

24. $(a+b)^3$ 24. (a) $(2a-3b)^7$.

মান নির্ণয় কর :—

25. $a^6+6a^5+15a^4+24a^3+15a^2+6a-31$, when $a=-3$.

26. $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x$, when $x=2$.

27. $x^4-12x^3+54x^2-108x+81$, when $x=3$.

28. $16a^4+32a^3+24a^2+8a-80$, when $a=-2$.

29. $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$, if $x=2$, $y=-1$.

30. $x^4-4x^3+6x^2-4x-2$, when $x=\sqrt{2}+1$.

31. $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a$, when $a=\sqrt[3]{3}-1$.

সরল কর :—

32. $(x+y)^5-(x-y)^5$ 33. $(1+x)^6-(x-1)^6$

34. $(a+b)^7+(a-b)^7$ 35. $(x+a)^6-(x-a)^6$.

Harder Factors (উৎপাদক নির্ণয়)

উদাহরণমালা 2

5. $a^3+b^3+c^3-3abc$ আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

নিম্ন রাশিগুলির উৎপাদক নির্ণয় কর :

উদা. 1. $a^3+b^3+c^3-3abc.$

প্রদত্ত রাশি $=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$
$=(a+b)^3+(c)^3-3ab(a+b)-3abc$
$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+2ab-ac-bc+c^2-3ab)$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$

উদা. 2. $a^6+8a^3+27.$

প্রদত্ত রাশি $=a^6-a^3+27+9a^3$
$=(a^2)^3+(-a)^3+(3)^3-3.a^2(-a).3$
$=(a^2-a+3)\{(a^2)^2+(-a)^2+(3)^2-(a^2)(-a)-(a^2).3-(-a).3\}$
$=(a^2-a+3)(a^4+a^2+9+a^3-3a^2+3a)$
$=(a^2-a+3)(a^4+a^3-2a^2+3a+9).$

6. বিবিধ রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

নিম্ন রাশিগুলির উৎপাদক নির্ণয় কর :

উদা. 3. $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4.$

প্রদত্ত রাশি $=4a^2b^2-2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$
$=4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)$
$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$
$=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)$
$=\{(a+b)^2-(c)^2\}\{c^2-(a^2+b^2-2ab)\}$
$=(a+b+c)(a+b-c)\{(c)^2-(a-b)^2\}$
$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$

উদা. 4. $x^2+x-(a+1)(a+2).$

[দ্রষ্টব্য : এখানে লক্ষ্য কর যে, $(a+2)$ এবং $-(a+1)$ এই দুইটির গুণফল $-(a+1)(a+2)$ এবং যোগফল $+1$ (অর্থাৎ x-এর সহগ) ; সুতরাং x-এর স্থানে $(a+2)x-(a+1)x$ লিখিতে হইবে।]

প্রদত্ত রাশি $=x^2+(a+2)x-(a+1)x-(a+1)(a+2)$
$=x(x+a+2)-(a+1)(x+a+2)$
$=(x+a+2)(x-a-1).$

উদা. 5. $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1.$

প্রদত্ত রাশি $=x^2-ax-\frac{x}{a}+1=x(x-a)-\frac{1}{a}(x-a)=(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right).$

উদা. 6. $(x^2-6x)^2-8(x^2-6x+8)-64.$ [B. U. '26]

প্রদত্ত রাশি $=a^2-8(a+8)-64$ [$x^2-6x=a$ ধরিয়া]

$=a^2-8a-64-64=a^2-8a-128=a^2-16a+8a-128$

$=a(a-16)+8(a-16)=(a-16)(a+8)$

$=(x^2-6x-16)(x^2-6x+8)$ [a-র মান বসাইয়া]

$=(x^2-8x+2x-16)(x^2-4x-2x+8)$

$=\{x(x-8)+2(x-8)\}\{x(x-4)-2(x-4)\}$

$=(x-8)(x+2)(x-2)(x-4).$

উদা. 7. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15.$ [C.U. 1941 ; M.U. '26].

প্রদত্ত রাশি $=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

$=(a+7)(a+15)+15$ [$x^2+8x=a$ ধরিয়া] $=a^2+22a+105+15$

$=a^2+22a+120=a^2+12a+10a+120=a(a+12)+10(a+12)$

$=(a+10)(a+12)=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x^2+8x+10)(x^2+6x+2x+12)$

$=(x^2+8x+10)\{x(x+6)+2(x+6)\}$

$=(x^2+8x+10)(x+6)(x+2).$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে বন্ধনী চারিটি একত্রে গুণ না করিয়া দুইটি দুইটি বন্ধনী গুণ করা হইয়াছে, কিন্তু যে-কোন দুইটি বন্ধনী লওয়া হয় নাই। এমন দুই দুইটি বন্ধনী লইয়া দুই দল করিতে হইবে যেন প্রথম দলের বন্ধনী দুইটির যোগফল, অন্য দলের বন্ধনী দুইটির যোগফলের সমান হয়।]

7. পরীক্ষা দ্বারা উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 8. $x^3-3x+2.$ [C. U. 1930 ; D. B. 1929]

[**দ্রষ্টব্য :** প্রথমে দেখ, x-এর মান কত ধরিলে প্রদত্ত রাশিটির মান শূন্য হয়। এখানে যদি x-এর মান $+1$ ধরি তবে রাশিটির মান 0 হয়, সুতরাং উহার একটি factor হইবে $x-1$. এইরূপে যদি x-এর মান -1 ধরিয়া রাশিটির মান শূন্য হইত, তবে $x+1$ ইহার একটি factor হইত।

$x^3-3x+2=x^3-x^2+x^2-x-2x+2=x^2(x-1)+x(x-1)-2(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x^2+2x-x-2)$

$=(x-1)\{x(x+2)-1(x+2)\}$

$=(x-1)(x+2)(x-1)=(x-1)^2(x+2)$

[N.B. এখানে প্রথমে ঠিক হইল যে x-এর মান $+1$ হইলে রাশিটির মান 0 হয়, সুতরাং উহার একটি উৎপাদক $x-1$. এইবার রাশিটি কি ভাবে ভাঙ্গিয়া সাজাইতে হইবে তাহা স্থির করিবার সময় বালকেরা প্রায়ই ভুল করে। তোমরা ঐ $x-1$ দ্বারা রাশিটিকে ভাগ করিয়া ভাগফল কি হয় দেখ। এখানে ভাগফল হইবে x^2+x-2. এইবার ঐ ভাগফলের প্রত্যেক পদটির সহিত ঐ factor $(x-1)$কে গুণের আকারে লিখিলেই রাশিটির সমান হইবে।]

উদা. 9. $x^4-x^3-7x^2+x+6$

[এখানে পরীক্ষা করিয়া দেখা যায় যে x-এর মান $1, -1, -2, 3$ যে কোন একটি বসাইলে প্রদত্ত রাশির মান শূন্য হয়; সুতরাং $x-1, x+1, x+2, x-3$ ঐ রাশির এক একটি উৎপাদক হইবে। এখানে রাশিটির পদগুলিকে এরূপে সাজাও যেন উহাদের দুই দুইটির মধ্যে $x+1$ উৎপাদক থাকে।

প্রদত্ত রাশি $=x^4+x^3-2x^3-2x^2-5x^2-5x+6x+6$

$=x^3(x+1)-2x^2(x+1)-5x(x+1)+6(x+1)$

$=(x+1)(x^3-2x^2-5x+6)$

[এক্ষণে দ্বিতীয় উৎপাদকটির $(x-1)$ উৎপাদক হয় এরূপে সাজাও।]

$=(x+1)(x^3-x^2-x^2+x-6x+6)$

$=(x+1)\{x^2(x-1)-x(x-1)-6(x-1)\}$

$=(x+1)(x-1)(x^2-x-6)$

[তৃতীয় উৎপাদকটিকে এরূপে সাজাও যেন $x+2$ একটি উৎপাদক হয়।]

$=(x+1)(x-1)(x^2+2x-3x-6)$

$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$.

8. আক্ষরিক অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া সমাধান।

উদা. 10. $a^2-2b^2-3c^2+ab+2ac+7bc$.

[রাশিমালাটির অন্তর্গত a, b, c অক্ষর তিনটির মধ্যে যে কোন একটি অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে প্রথমে সাজাও।]

প্রদত্ত রাশি $=a^2+ab+2ac-2b^2+7bc-3c^2$

$=a^2+(b+2c)a-(2b^2-7bc+3c^2)$

$=a^2+(b+2c)a-(2b^2-6bc-bc+3c^2)$

$=a^2+(b+2c)a-(2b-c)(b-3c)$

$=a^2+(2b-c)a-(b-3c)a-(2b-c)(b-3c)$

$=a(a+2b-c)-(b-3c)(a+2b-c)$

$=(a+2b-c)(a-b+3c)$.

[দ্রষ্টব্য: এখানে $-(2b-c)(b-3c)$কে এইরূপ দুইটি রাশিতে বিভক্ত করা হইল যাহাদের যোগফল a-এর সহগের সমান অর্থাৎ $b+2c$ হয় এবং গুণফল

$-(2b-c)(b-3c)$ হয়। সেই রাশি দুইটি হইল $(2b-c)$ এবং $-(b-3c)$. প্রদত্ত রাশিতে a^2-এর যদি কোন সাংখ্য-সহগ থাকিত, তবে প্রথমে $-(2b-c)(b-3c)$এর সহিত সেই সহগের গুণফলকে ঐরূপ দুই রাশিতে বিভক্ত করিতে হইত।]

উদা. 11. $a^2-3bc+3b^2-4ab+ac.$

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=(a^2-4ab+3b^2)+ac-3bc$$
$$=(a^2-ab-3ab+3b^2)+c(a-3b)$$
$$=\{a(a-b)-3b(a-b)\}+c(a-3b)$$
$$=(a-b)(a-3b)+c(a-3b)=(a-3b)(a-b+c).$$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে প্রদত্ত রাশিতে যে যে পদ a ও b-এর দুই মাত্রাবিশিষ্ট, সেই পদগুলি একত্রে লইয়া একদল এবং অন্যপদগুলি একত্রে লইয়া আর একদল করা হইয়াছে।]

উদা. 12. $a^4+a^3-10a^2+a+1.$

[যে রাশির প্রথম ও শেষ দিক হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সহগদ্বয় সমান, তাহার উৎপাদক নির্ণয়ের সময় ঐরূপ পদদ্বয়কে একত্রে লইতে হইবে।]

প্রদত্ত রাশি$=(a^4+1)+(a^3+a)-10a^2$

$=(a^2+1)^2-2a^2+a(a^2+1)-10a^2=(a^2+1)^2+a(a^2+1)-12a^2$

$=x^2+ax-12a^2$ [$a^2+1=x$ ধরিয়া] $=x^2+4ax-3ax-12a^2$

$=(x+4a)(x-3a)=(a^2+1+4a)(a^2+1-3a).$

9. চক্রক্রম (Cyclic order) **:** একটি চক্র বা বৃত্তের পরিধির উপর পর পর a, b, c বসাইয়া যদি a হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই ক্রমে পড়া যায়, তবে abc এই-ক্রমে অক্ষরগুলি পাওয়া যায়। ঐরূপ b হইতে আরম্ভ করিলে bca এবং c হইতে আরম্ভ করিলে cab ক্রমে পাওয়া যায়। এইরূপ ক্রমকে চক্রক্রম বলা হয়।

চক্রক্রমে সাজান রাশির উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে রাশিটিকে যে কোন একটি অক্ষরের (ধর a) ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইবে। তারপর লব্ধ দুইটি উৎপাদকের মধ্যে দেখিবে একটিকে b-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। এইভাবে পর পর a, b, c-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া উৎপাদক নির্ণয় করা সহজ হইবে। আর উত্তরটিকে চক্রক্রমে সাজাইয়া লিখিবে। মনে কর, উত্তর হইল $(a-b)(b-c)(a-c)$, উহা চক্রক্রমের আকারে না থাকায় উহাকে চক্রক্রমের আকারে সাজাইয়া লেখা হয়। এখানে $a-c$ চক্রক্রমে নাই, $a-c$কে $-(c-a)$ লেখা যায় এবং তাহা চক্রক্রমের সহিত মিলিয়া যায়। সেজন্য উত্তরটিকে $-(a-b)(b-c)(c-a)$ লেখা হয়।

[**দ্রষ্টব্য :** চক্রক্রমের অঙ্কে a, b, c-এর পরিবর্তে x, y, z থাকিলেও ঐ নিয়মেই সমাধান করিবে। $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$ এই রাশিটির উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য উদা. 13তে a, b, c-এর পরিবর্তে a^2, b^2, c^2 বসাইয়া সমাধান করিবে।]

[Factors of Cyclic order]

উদা. 13. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

[C. U. 1928, '40, '45 ; D. B. '24 ; G. U. '48]

প্রদত্ত রাশি $=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$

$=(b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

[**দ্রষ্টব্য :** রাশিটি ভাঙ্গিবার সময় প্রথম বন্ধনী ঠিক রাখিয়া বাকিগুলিকে ভাঙ্গিয়া এমনভাবে আবার সাজাইতে হইবে যাহাতে প্রত্যেক বন্ধনীর ভিতর প্রথম বন্ধনীর $(b-c)$ পাওয়া যায়। আর, উত্তরটি $(a-b)(b-c)(a-c)$ দেওয়া যায়, কিন্তু সাধারণ নিয়ম এই যে cyclic order-এর factor-গুলি cyclic order-এ উত্তর দিতে হয়। Cyclic order হইবে $(a-b)(b-c)(c-a)$; উত্তরে $(a-c)$ এইটি cyclic order-এর সহিত মিলিতেছে না, cyclic order $(c-a)$ হইবে ; এখন দেখ $a-c=-c+a=-(c-a)$, সুতরাং $a-c$-এর স্থানে $-(c-a)$ লেখা যায়। $(c-a)$-এর আগে যে $-$ চিহ্ন আছে, উহা সর্বপ্রথমে বসাইতে হয়।]

উদা. 14. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$. [D. B. 1930]

প্রদত্ত রাশি $=a(b^2-c^2)+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c$

$=a(b^2-c^2)-a^2(b-c)-bc(b-c)$

$=(b-c)(ab+ac-a^2-bc)=(b-c)\{a(c-a)-b(c-a)\}$

$=(b-c)(c-a)(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$.

উদা. 15. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

প্রদত্ত রাশি $=a^3(b-c)+b^3c-ab^3+ac^3-bc^3$

$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$=a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)(b-c)$

$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=(b-c)(a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2)$

$=(b-c)(a^3-ab^2-abc+b^2c-ac^2+bc^2)$

$=(b-c)\{a(a^2-b^2)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a^2+ab-bc-c^2)$

$=(a-b)(b-c)\{(a+c)(a-c)+b(a-c)\}$

$=(a-b)(b-c)(a-c)(a+c+b)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

উদা. 16. $(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b)$.

প্রদত্ত রাশি $=(x^2+2ax+a^2)(b-c)+(x^2+2bx+b^2)(c-a)$
$+(x^2+2cx+c^2)(a-b)$
$=x^2(b-c+c-a+a-b)+2x\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$
$+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=x^2\times 0+2x\times 0+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

উদা. 17. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$. [C.U. '32, '35]

প্রদত্ত রাশি $=(a^2b+a^2c+abc)+(b^2c+ab^2+abc)+(c^2a+c^2b+abc)$
$=a(ab+ac+bc)+b(bc+ab+ac)+c(ac+bc+ab)$
$=(ab+ac+bc)(a+b+c)$.

[এখানে $3abc$-র এক একটি abcকে এক একটি পদের সহিত লওয়া হইল।]

উদা. 18. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$. [C. U. '50]

প্রদত্ত রাশি $=a^2(b+c)+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$
$=a^2(b+c)+(ab^2+ac^2+2abc)+(b^2c+bc^2)$
$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$
$=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$
$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}=(b+c)(c+a)(a+b)$.

উদা. 19. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$.

প্রদত্ত রাশি $=\{a(b^2+c^2)+2abc\}+a^2b+a^2c+b^2c+bc^2$
$=a(b^2+c^2+2bc)+a^2(b+c)+bc(b+c)$
$=a(b+c)^2+a^2(b+c)+bc(b+c)$
$=(b+c)(ab+ac+a^2+bc)=(b+c)(c+a)(a+b)$.

উদা. 20. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

প্রদত্ত রাশি $=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)-x^3-y^3-z^3$
$=3(x+y)(y+z)(z+x)$.

উদা. 21. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+9abc$. [A. U. '22]

প্রদত্ত রাশি $=a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)+9abc$
$=a(b^2+c^2)-2abc+b(c^2+a^2)-2abc+c(a^2+b^2)$
$-2abc+9abc$
$=b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^2(b+c)+3abc$
$=b^2(c+a)+abc+c^2(a+b)+abc+a^2(b+c)+abc$
$=b(bc+ab+ac)+c(ac+bc+ab)+a(ab+ac+bc)$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

উদা. 22. $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$.

প্রদত্ত রাশি $=\{a+(b+c)\}\{a(b+c)+bc\}-abc$
$=\{a^2(b+c)+a(b+c)^2+abc+bc(b+c)\}-abc$
$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$
$=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$
$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}=(b+c)(c+a)(a+b)$.

উদা. 23. $x^3+(x-1)^3+(1-2x)^3$. [D. B. '40]

মনে কর, $a=x$, $b=x-1$, $c=1-2x$.

সুতরাং $a+b+c=x+x-1+1-2x=0$.

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশি $=a^3+b^3+c^3=3abc$ [$\because$ $a+b+c=0$]
$=3x(x-1)(1-2x)$ [a, b, c-এর মান বসাইয়া]

উদা. 24. $8(a+b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$.

প্রদত্ত রাশি $=(2a+2b+2c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$
$=\{(a+b)+(b+c)+(c+a)\}^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$
$=\{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+3(a+b+b+c)$
$\times(b+c+c+a)(c+a+a+b)-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$
$=3(a+2b+c)(a+b+2c)(2a+b+c)$.

উদা. 25. $(a+b-2c)^3+(b+c-2c)^3+(c+a-2b)^3$. [I.P.S. 1936]

মনে কর, $x=a+b-2c$, $y=b+c-2a$, $z=c+a-2b$

$\therefore$ $x+y+z=a+b-2c+b+c-2a+c+a-2b=0$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=x^3+y^3+z^3=3xyz$ [$\because$ $x+y+z=0$]
$=3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$.

উদা. 26. $a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3$.

প্রদত্ত রাশি $=(ab-ac)^3+(bc-ab)^3+(ac-bc)^3$
$=3(ab-ac)(bc-ab)(ac-bc)$ [$\because$ $ab-ac+bc-ab+ac-bc=0$
$=3a(b-c).b(c-a).c(a-b)=3abc(b-c)(c-a)(a-b)$.

Exercise 2

উৎপাদক নির্ণয় কর :—

1. $m^4+m^2n^2+n^4$. [C.U. '33]
2. x^4+4. [C.U. '34]
3. $4x^2-4xy-2yz-z^2$ [C U. '35]
4. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$ [W.B.S.F. '53]
5. $4x^4+81$ [C U. '37]
6. x^4+2x^2+9. [D.B. '30]
7. x^4+64. [W.B.S.F. '52 ; B.U. 1920 ; D.B. '31]

8. x^4-8x^2+4 [B. U. '24]

9. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$. [B. U. '23]

10. x^6-729 [D. B. '37] 10. (a) $8a^3+4a-3$

11. $x^2-y^2-6xa+2ya+8a^2$. [D. B. '48]

12. $12x^2+65x+77$. [D. B. '34]

13. $21x^2+40xy-21y^2$. [D. B. '38]

14. $8a^4+2a^2-45$. [A. U. '27] 15. a^6+32a^3-64.

16. $a^3+b^3-8c^3+6abc$. 17. $a^3-3a-2a^2+4$. [C. U. '39]

18. $x^3+16x^2+13x-30$. [D. B. '36]

19. $x^3+9x^2+26x+24$. [D. B. '38]

20. $(x^2-4x)(x^2-4x-1)-20$. [B. U. '12]

21. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$. [P. U. '26]

22. $2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2$. [C. U. '26]

23. $(a+b)^2-10(a^2-b^2)-56(a-b)^2$. [B. U. '09]

24. $x(x-1)(x-2)-3x+3$. [D. B. '36]

25. $a(a-1)(a-2)(a-3)-120$.

26. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+13$.

27. $(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$. [D. B. '32]

28. $x^3-y^3+z^3+3xyz$. [A. U. '28]

28. (a) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$. [P. U. '30]

29. $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$. [M. U. '27]

29. (a) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$. [C. U. '29, '39]

30. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$

30. (a) $(b+c)(c+a)(a+b)+abc$.

31. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$.

32. $(2x-3y)^3+(3y-z)^3+(z-2x)^3$.

33. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$. [C. U. 1946]

34. $x^2+2x-(a+1)(a+3)$.

[Hints : $2x=(a+3)x-(a+1)x$]

35. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)-63$.

[$x(2x-3)$ একদল এবং $(2x+1)(x-2)$ আর একদল কর।]

36. $(a+2b-c)^3-(a+b)^3-(b-c)^3$.

[Hints : $(a+2b-c)^3=\{(a+b)+(b-c)\}^3$]

37. $4(ad-bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$

[Hints : $4(ad-bc)^2=(2ad-2bc)^2$]

38. $(1-c^2)(1+a)^2-(1-a^2)(1-c)^2$ [C. U. 1881]

39. (i) $4(x^2+2x+5)^2+17(x^2+2x+5)(x^2+6x)+4(x^2+6x)^2$

(ii) $a^4+6a^3+4a^2-15a+6$ [C. U. 1948]

40. $x^4+x^3+2x^2+x+1$ [C. U. 1948]

41. $x^2(b-c)+b^2(c-x)+c^2(x-b)$ [D. B. '27]

42. x^6-22x^3+125. 42. (a) $2a^2+2a-3ab-b+b^2$. [D. B '49]

43. $6a^2-2b^2-5bc-ab+11ac+3c^2$.

44. $a^4-5a^3b+6a^2b^2-5ab^3+b^4$.

45. $a^4b^4+1+a^2b^2-c^2+2abc$.

46. $x^5+4x^4-13x^3-13x^2+4x+1$.

47. $xy(x^3-y^3)+yz(y^3-z^3)+zx(z^3-x^3)$.

48. $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$.

49. $(2b-a)^3+(2a-b)^3-(a+b)^3$. [B.U. 1900]

50. $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)$. [D.B. 1933]

The Remainder Theorem and Divisibility

(ভাগশেষ ও বিভাজ্যতা বিষয়ক উপপাদ্য)

10 **অপেক্ষক।** x, a প্রভৃতি যে কোন অক্ষরযুক্ত রাশিকে সেই অক্ষরটির রাশিমালা বা অপেক্ষক (expression বা function) বলে। অপেক্ষকটির মান ঐ অক্ষরটির মানের উপর নির্ভর করে। সেইজন্য ঐ অক্ষরটিকে ঐ অপেক্ষকের **চল** (variable) বলে। যথা—

(1) x^2+3x+2, a^3+5a^2+4 প্রভৃতি রাশি যথাক্রমে x ও a-এর অপেক্ষক। প্রথমটিতে x এবং দ্বিতীয়টিতে a চল।

(2) অনুরূপে a^2+ab+b^2 বা, x^3-y^3কে যথাক্রমে a ও b-এর এবং x ও y-এর অপেক্ষক বলে।

লিখন প্রণালী। x-যুক্ত কোন অপেক্ষক বা রাশিমালাকে সংক্ষেপে $f(x)$ লেখা হয়।

এখন দেখ, $2x^2+3x-4$ একটি অপেক্ষক, সুতরাং $f(x)=2x^2+3x-4$.

এক্ষণে যদি $x=2$ ধরা হয়, তবে $f(2)=2.2^2+3.2-4$ হইবে।

অনুরূপে $f(0)=2.0^2+3.0-4$ হইবে।

মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক। কোন অপেক্ষকের চল রাশিটির (x বা a) ঘাতগুলি যদি ধনাত্মক পূর্ণ বা অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে তাহাকে মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক (Rational and integral function) বলে। এই অপেক্ষকে চল রাশিটির কোন মূল থাকে না।

$px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ রাশিমালায় যদি n অখণ্ড ধনরাশি (positive integer) হয় এবং $p, q, r, \cdots, l, m$-এর প্রত্যেকটি যদি ধ্রুবক হয়, তবে উহাকে x-এর মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক বলে।

11. ভাগশেষ বিষয়ক উপপাদ্য (Remainder Theorem)

x-যুক্ত কোন মূলদ অখণ্ড রাশিমালাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগশেষ হইবে তাহা ঐ রাশিমালায় x-এর স্থানে a বসাইয়া পাওয়া যায় (অর্থাৎ x-এর স্থানে a বসাইয়া ঐ রাশিমালার যে মান হইবে তাহাই নির্ণেয় ভাগশেষ)।

প্রমাণ (প্রথম প্রণালী)।

$$
\begin{array}{l|l|l}
x-a & mx^2+nx+l & mx+(ma+n) \\
 & \underline{mx^2-max} & \\
 & (ma+n)x+l & \\
 & \underline{(ma+n)x-a(ma+n)} & \\
 & ma^2+na+l, &
\end{array}
$$

ইহাই ভাগশেষ।

এখন দেখ প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর স্থানে a বসাইলে পাই ma^2+na+l, সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

(**দ্বিতীয় প্রণালী**) মনে কর, উক্ত ভাগ প্রক্রিয়ায় Q ভাগফল এবং R ভাগশেষ (x-বর্জিত)।

এক্ষণে প্রমাণ করিতে হইবে যে, $R=ma^2+na+l$.

প্রমাণ : ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ.

$\therefore\ mx^2+nx+l=(x-a)\times Q+R$, ইহা একটি অভেদ বলিয়া x-এর যে কোন মান ধরিলে উভয় পক্ষ সমান থাকিবে এবং R-এর মানের কোন পরিবর্তন হইবে না, কারণ উহা x-বর্জিত। মনে কর, x-এর মান a ধরিলে Q-এর মান Q' হইবে।

$\therefore\ ma^2+na+l=(a-a)\times Q'+R=0\times Q'+R=R.$

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) কোন রাশিমালাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিয়া কত ভাগশেষ থাকে তাহা ঐ রাশিমালায় x-এর স্থানে a বসাইয়া পাওয়া যায়।

(2) কোন রাশিমালাকে $x+a$ দ্বারা ভাগ করিলে কত ভাগশেষ হয় তাহা নির্ণয় করিবার জন্য ঐ রাশিমালায় x-এর মান $-a$ ধরিতে হয়।

(3) কোন রাশিমালাকে $bx+a$ দ্বারা ভাগ করিলে কত ভাগশেষ হয় তাহা নির্ণয় করিবার জন্য ঐ রাশিমালায় x-এর মান $-\frac{a}{b}$ ধরিতে হয়।

উদাহরণ। ভাগ না করিয়া নিম্নের ভাগ অঙ্কগুলির ভাগশেষ নির্ণয় কর :—

(a) $(x^3+2x^2-3x+5)\div(x-3)$.

(b) $(px^2+qx+r)\div(x+a)$.

(a) এখানে $\because$ ভাজকটি $x-3$, $\therefore$ ভাজ্যে x-এর মান 3 বসাইলে ভাগশেষ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ$=(3)^3+2.(3)^2-3\times3+5$
$=27+18-9+5=41.$

(b) $\because$ ভাজকটি $x+a$, $\therefore$ ভাজ্যে $x=-a$ ধরিলে ভাগশেষটি পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ$=p.(-a)^2+q(-a)+r=pa^2-qa+r.$

12. গুণনীয়ক উপপাদ্য (The Factor Theorem)

x-এর কোন মূলদ অখণ্ড রাশিমালায় যদি x-এর মান a ধরিলে রাশিমালাটির মান শূন্য (0) হয়, তবে $(x-a)$ ঐ রাশিমালার একটি গুণনীয়ক (Factor) হইবে অর্থাৎ রাশিমালাটি $x-a$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

[সংক্ষেপে বলা যায়, $f(a)=0$ হইলে, $f(x)$-এর একটি গুণনীয়ক $(x-a)$ হইবে।]

প্রমাণ : $\because$ প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর স্থানে a বসাইলে রাশিমালার মান শূন্য হয়,

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে উহাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ শূন্য হইবে।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালাটি $x-a$ দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ $x-a$ উহার একটি গুণনীয়ক।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) x-এর মান $-a$ ধরিলে যদি কোন রাশিমালার মান শূন্য (0) হয়, তবে রাশিমালাটি $x-(-a)$ বা $x+a$ দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ $x+a$ উহার একটি গুণনীয়ক।

(2) x-এর মান $-\frac{b}{a}$ ধরিলে যদি কোন রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে $ax+b$ উহার একটি গুণনীয়ক হইবে।]

উদাহরণমালা 3

উদা. 1. প্রমাণ কর যে $x-2$ দ্বারা $x^3-7x^2+11x-2$ সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

এখানে ভাজক$=x-2$, সুতরাং x-এর মান 2 হইলে যদি প্রদত্ত রাশিমালার মান 0 হয়, তবে উহা $x-2$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

একণে, $x^3-7x^2+11x-2=(2)^3-7.(2)^2+11\times2-2$
$=8-28+22-2=0.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $x-2$ দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 2. প্রমাণ কর যে x^4-3x^2+2এর একটি উৎপাদক $x-1$.

প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর মান 1 বসাইলে উহার মান $=(1)^4-3.(1)^2+2=1-3+2=0$ হয়, $\therefore$ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক $x-1$ হইবে।

উদা. 3. p-এর মান কত হইলে $x+1$ দ্বারা $x^5-61x+p$ সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে? [M. U. 1926]

এখানে ভাজক $x+1$; সুতরাং $x=-1$ ধরিলে যদি প্রদত্ত রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে উহা $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

একণে, $x^5-61x+p=(-1)^5-61\times(-1)+p=-1+61+p=60+p.$
$\therefore$ এখানে $60+p=0$, $\therefore$ p-এর নির্ণেয় মান $=-60$.

উদা. 4. b ও c-র মধ্যে সম্বন্ধ কিরূপ হইলে x^3+bx+c এবং x^3+cx+b-এর একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকিবে? [P. U. 1891]

মনে কর, সাধারণ গুণনীয়কটি $(x-a)$.
একণে $\because$ x^3+bx+c-এর $x-a$ একটি গুণনীয়ক,
$\therefore$ $a^3+ab+c=0$....(1)
আবার, $\because$ x^3+cx+b-এর $x-a$ একটি গুণনীয়ক,
$\therefore$ $a^3+ac+b=0$...(2)
একণে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$ab-ac-b+c=0$, বা, $a(b-c)=b-c$, $\therefore$ $a=\dfrac{b-c}{b-c}=1.$

একণে (1)-এ a-র মান 1 বসাইয়া পাই
$1^3+1.b+c=0$, বা, $b+c+1=0$.
$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত হইল $b+c+1=0$ হইবে।

উদা. 5. শূন্য ব্যতীত a-র মান কত হইলে x^2+x-a ও x^3-x-a রাশি দুইটির একটি সাধারণ উৎপাদক পাওয়া যায়? [P. U. 1925]

মনে কর, সাধারণ উৎপাদকটি $x-p$.
$\because$ x^2+x-a-এর একটি উৎপাদক $x-p$, $\therefore$ $p^2+p-a=0$......(1).
আবার, $\because$ x^3-x-a-এর একটি উৎপাদক $x-p$,
$\therefore$ $p^3-p-a=0$......(2).
একণে, (1)−(2) করিয়া পাই, $-p^3+p^2+2p=0$,
বা, $-p(p^2-p-2)=0$, বা $-p(p-2)(p+1)=0$,
$\therefore$ $p=0, -1, 2$ হইতে পারে।

p-এর মান (1)-এ বসাইলে a-র নির্ণেয় মান পাওয়া যাইবে।

$\because$ (1)-এ $p=-1$ বা 0 বসাইলে $a=0$ হয়, সুতরাং উহা গ্রাহ্য হইবে না (প্রদত্ত শর্ত অনুসারে)।

এক্ষণে (1)-এ $p=2$ ধরিলে পাই $2^2+2-a=0$, $\therefore$ $a=6$.

$\therefore$ a-র নির্ণেয় মান 6 হইল।

উদা. 6. কি শর্তে $x^3+(p+q)x+a$ রাশিটি $x+p+q$ দ্বারা বিভাজ্য হয়? [P. U. 1895]

এখানে ভাজক $x+p+q$, সুতরাং $x+p+q=0$ অর্থাৎ $x=-(p+q)$ হইলে যদি প্রদত্ত রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে উহা $x+p+q$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

এক্ষণে, $\{-(p+q)\}^3+(p+q)\times-(p+q)+a=0$.

বা, $-(p+q)^3-(p+q)^2+a=0$, বা, $(p+q)^3+(p+q)^2-a=0$,

বা, $(p+q)^3+(p+q)^2=a$, বা, $(p+q)^2(p+q+1)=a$,

অতএব, $a=(p+q)^2(p+q+1)$ হইবে, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

উদা. 7. যদি px^2+qx+r ও rx^2+qx+p-এর গ. সা. গু. $x+a$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $p+q+r=0$, অথবা, $q=p+r$.

$\because$ $x+a$ প্রদত্ত রাশি দুইটির গ. সা. গু.

$\therefore$ $x=-a$ হইলে রাশি দুইটির মান শূন্য হইবে।

প্রদত্ত রাশি দুইটিতে x-এর মান $-a$ বসাইয়া পাই

$pa^2-qa+r=0\cdots(1)$ এবং $ra^2-qa+p=0\cdots(2)$.

(1)−(2) করিয়া পাই $pa^2-ra^2-p+r=0$,

বা, $a^2(p-r)-(p-r)=0$,

বা, $a^2(p-r)=(p-r)$, বা, $a^2=1$, $\therefore$ $a=\pm1$,

এক্ষণে, যদি $a=1$ হয়, তবে (1) হইতে পাই $p(1)^2-q(1)+r=0$,

বা, $p-q+r=0$, $\therefore$ $q=p+r$.

আবার, যদি $a=-1$ হয়, তবে (1) হইতে পাই

$p(-1)^2-q(-1)+r=0$, বা, $p+q+r=0$.

অতএব, $x+a$ প্রদত্ত রাশি দুইটির গ. সা. গু. হইলে

$p+q+r=0$, অথবা $q=p+r$ হইবে।

13. বিভাজ্যতা বিষয়ক কতিপয় উপপাদ্য।

উপপাদ্য 1. n যে-কোন অখণ্ড ধনরাশি (যুগ্ম বা অযুগ্ম) হইলে a^n-b^n রাশিটি $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

প্রমাণ ঃ মনে কর, $a^n - b^n$-কে $a-b$ দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল Q এবং a-বর্জিত ভাগশেষ R হইবে।

$\therefore$ $a^n - b^n = (a-b) \times Q + R$ (ইহা একটি অভেদ)

$\because$ R-ভাগশেষটি a-বর্জিত, $\therefore$ a-র মান যাহাই হউক না কেন, তাহাতে Rএর মান পরিবর্তিত হইবে না। Qটি a-বর্জিত না হওয়ায় a-র মান পরিবর্তিত হইলে Q-এর মান পরিবর্তিত হইবে।

মনে কর, a-র মান b ধরিলে Qএর মান Q' হয়।

এক্ষণে উক্ত অভেদে a-র স্থানে b লিখিয়া পাই

$b^n - b^n = (b-b) \times Q' + R = 0 \times Q' + R = R$, $\therefore$ $R = b^n - b^n = 0$.

অতএব $a^n - b^n$ রাশিটি $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য।

[দ্রষ্টব্য ঃ (i) $\dfrac{a^n - b^n}{a-b} = \dfrac{a-b}{a-b} = 1$ (যদি $n=1$ হয়)

(ii) $\dfrac{a^n - b^n}{a-b} = \dfrac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$ (যদি $n=2$ হয়)

(iii) $\dfrac{a^n - b^n}{a-b} = \dfrac{a^3 - b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$ (যদি $n=3$ হয়)

(iv) সাধারণভাবে $\dfrac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}.b + a^{n-3}.b^2 + \cdots + b^{n-1}$]

উপপাদ্য 2. n যে-কোন যুগ্ম পূর্ণ ধনসংখ্যা হইলে $a^n - b^n$ রাশিটি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হয়, কিন্তু n অযুগ্ম হইলে বিভাজ্য হইবে না।

(পূর্ব উপপাদ্যের ন্যায় এখানে লেখা যায়)

$a^n - b^n = (a+b) \times Q + R$ (অভেদ)।

$\because$ R ভাগশেষটি a-বর্জিত, $\therefore$ a-র কোন মানে R পরিবর্তিত হইবে না। উক্ত অভেদে a-র স্থানে $-b$ লিখিয়া পাই,

$$(-b)^n - b^n = (-b+b) \times Q' + R = 0 \times Q' + R = R.$$

এক্ষণে, n যুগ্ম সংখ্যা হইলে $(-b)^n = b^n$ হইবে এবং সেস্থলে

$(-b)^n - b^n = b^n - b^n = 0$ হইবে, সুতরাং, তখন $R = 0$ হইবে।

অতএব, n যুগ্ম পূর্ণ ধনসংখ্যা হইলে $a^n - b^n$ রাশিটি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হয়।

আবার, যদি n অযুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে $(-b)^n = -b^n$ হইবে এবং তখন $(-b)^n - b^n = -b^n - b^n = -2b^n$ হইবে বলিয়া R-এর মান শূন্য হইবে না। অতএব, n অযুগ্ম হইলে $a+b$ দ্বারা $a^n - b^n$ বিভাজ্য হইবে না।

উপপাদ্য 3. n যে-কোন অযুগ্ম অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $a+b$ দ্বারা a^n+b^n বিভাজ্য হয় ; কিন্তু n যুগ্ম হইলে বিভাজ্য হয় না।

(পূর্বের ন্যায়) $a^n+b^n=(a+b)\times Q+R.$ (ইহা একটি অভেদ)। এই অভেদে a-র স্থানে $-b$ লিখিয়া পাই,

$$(-b)^n+b^n=(-b+b)\times Q'+R=0\times Q'+R=R.$$

এক্ষণে, n অযুগ্ম হইলে $(-b)^n=-b^n$ হইবে এবং সে স্থলে

$R=(-b)^n+b^n=-b^n+b^n=0$ হইবে ; সুতরাং n অযুগ্ম অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে a^n+b^n রাশিটি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হয়।

আবার, n যুগ্ম সংখ্যা হইলে $(-b)^n=b^n$ হইবে এবং তখন

$R=(-b)^n+b^n=b^n+b^n=2b^n$ হইবে কিন্তু 0 হইবে না।

অতএব n যুগ্ম হইলে a^n+b^n রাশিটি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উপপাদ্য 4. n যুগ্ম বা অযুগ্ম যে-কোন সংখ্যাই হউক না কেন a^n+b^n কখন $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য হয় না।

(পূর্বের ন্যায়) $a^n+b^n=(a-b)\times Q'+R$ (অভেদে সমান)।

উক্ত অভেদে a-র স্থানে b বসাইয়া পাই

$b^n+b^n=(b-b)\times Q'+R=0\times Q'+R=R.$

$\therefore\ R=b^n+b^n=2b^n$, কিন্তু শূন্য নহে।

অতএব a^n+b^n কখনই $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, 13^8-6^8, 19 দ্বারা বিভাজ্য।

$\because$ 8 অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যা, $\therefore\ 13^8-6^8$ রাশিটি $(13+6)$ বা 19 দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 2. n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে $5^{3n}-3^{4n}$ রাশিটি 44 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

$5^{3n}-3^{4n}=(5^3)^n-(3^4)^n=(125)^n-(81)^n.$

এস্থলে n অখণ্ড ধনসংখ্যা বলিয়া $(125)^n-(81)^n$ রাশিটি $(125-81)$ বা 44 দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 3. যদি n যুগ্ম অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে $4^{3n}-6^{2n}$ রাশিটির শেষ দুই অঙ্ক শূন্য হইবে এবং উহা 100 দ্বারা বিভাজ্য।

প্রদত্ত রাশি $=(4^3)^n-(6^2)^n=(64)^n-(36)^n.$

এক্ষণে, $\because$ n যুগ্ম অখণ্ড ধনসংখ্যা, $\therefore\ (64)^n-(36)^n$ রাশিটি $(64+36)$ বা 100 দ্বারা বিভাজ্য। আবার, 100 প্রদত্ত রাশিটির একটি গুণনীয়ক বলিয়া উহার শেষ দুই অঙ্ক 0 হইবে।

উদা. 4. যদি n অযুগ্ম অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে 3^n+2^nএর শেষ অঙ্কটি 5 হইবে।

$\because$ n অযুগ্ম অখণ্ড ধনসংখ্যা, $\therefore$ 3^n+2^n রাশিটি $3+2$ অর্থাৎ 5 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব, উক্ত রাশিটির শেষ অঙ্ক 5 অথবা 0 হইবে। কিন্তু যুগ্ম সংখ্যার যে-কোন ঘাত যুগ্ম সংখ্যা এবং অযুগ্ম সংখ্যার যে-কোন ঘাত অযুগ্ম সংখ্যা হয় বলিয়া 3^n অযুগ্ম এবং 2^n যুগ্ম হইবে। $\therefore$ উহাদের সমষ্টি অযুগ্ম হইবে। অতএব প্রদত্ত রাশির শেষ অঙ্ক 0 না হইয়া 5 হইবে।

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, কোন সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য হইলে ঐ সংখ্যাটিও 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। [P. U. 1915]

একক, দশক প্রভৃতি স্থানে যথাক্রমে m, l প্রভৃতি ধরিয়া প্রদত্ত সংখ্যাকে সাধারণভাবে $p.10^n+q.10^{n-1}+r.10^{n-2}+\cdots+l.10+m$ এই আকারে প্রকাশ করা যায়। ইহাকে 9 বা $(10-1)$ দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগশেষ থাকে তাহা উক্ত রাশিমালায় 10-এর স্থানে 1 বসাইয়া পাওয়া যায়।

অতএব, ঐ ভাগশেষ $=p(1)^n+q(1)^{n-1}+\cdots+l.1+m$
$=p+q+\cdots+l+m.$

অতএব, যদি ঐ ভাগশেষটি অর্থাৎ $p, q, r, \cdots l, m$ অঙ্কগুলির সমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে প্রদত্ত সংখ্যাটিও 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

উদা. 6. n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(ab)^n-(bc)^n+(cd)^n-(da)^n$ রাশিটি $ab-bc+cd-da$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে। [M. U. 1873]

$ab-bc+cd-da=b(a-c)-d(a-c)=(a-c)(b-d).$

প্রদত্ত রাশিমালাটি a-র একটি মূলদ অখণ্ড রাশি।

প্রদত্ত রাশিমালায় a-র স্থানে c বসাইলে পাই,

রাশিমালাটি $=(cb)^n-(bc)^n+(cd)^n-(dc)^n$
$=(bc)^n-(bc)^n+(cd)^n-(cd)^n=0$

$\therefore$ ঐ রাশিমালাটি $a-c$ দ্বারা বিভাজ্য।

অনুরূপে, b-র স্থানে d বসাইয়া প্রমাণ করা যায় যে রাশিমালাটি $b-d$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালাটি $(a-c)$ ও $(b-d)$এর গুণফলের দ্বারাও অর্থাৎ $ab-bc+cd-da$ দ্বারাও বিভাজ্য।

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $a-b$, $b-c$ ও $c-a$এর প্রত্যেকটি
$a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$এর উৎপাদক। [P. U. 1916]

$a-b$এর মান শূন্য হইলে অর্থাৎ $a=b$ হইলে যদি প্রদত্ত রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে $a-b$ রাশিমালাটির উৎপাদক হইবে।

এক্ষণে প্রদত্ত রাশিতে a-র স্থানে b বসাইয়া পাই

প্রদত্ত রাশিমালা $= b^n(b-c)+b^n(c-b)+c^n(b-b)$

$= b^n(b-c)-b^n(b-c)+c^n\times 0=0,$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক $a-b$ হইল।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে $b-c$ এবং $c-a$ ঐ রাশিমালার গুণনীয়ক।

উদা. 8. m-এর মান কত হইলে $2x^3+7x^2-x+m$ ও $3x^3+10x-11$কে $x+4$ দ্বারা ভাগ করিলে একই ভাগশেষ থাকিবে?

প্রদত্ত রাশি দুইটিকে $x+4$ দিয়া ভাগ করিয়া কি ভাগশেষ থাকে তাহা পাওয়া যাইবে ঐ রাশিদ্বয়ে x-এর মান -4 বসাইয়া।

$\therefore$ প্রথম রাশি হইতে ভাগশেষ $=2(-4)^3+7(-4)^2-(-4)+m$

$=-128+112+4+m=-12+m.$

দ্বিতীয় রাশি হইতে ভাগশেষ $=3(-4)^2+10(-4)-11$

$=48-40-11=-3,$

$\because$ ভাগশেষ দুইটি সমান, $\therefore\ -12+m=-3,\ \therefore\ m=9.$

Exercise 3

1. $f(a)=2a^3-3a^2+5a+6$ হইলে নিম্নের মানগুলি নির্ণয় কর :—
(i) $f(2)$, (ii) $f(-1)$, (iii) $f(-3)$, (iv) $f(n)$.

2. ভাগ না করিয়া নিম্নের ভাগগুলির ভাগশেষ নির্ণয় কর :—
(i) $(x^3+2x^2-3x+4)\div(x-3)$
(ii) $(2a^3-3a^2+5a+7)\div(a+2)$
(iii) $(5x^3+9x^2+10)\div(x+3)$
(iv) $(3a^4-2a^3+5a^2+a-36)\div(a-4)$
(v) $(4x^3+3x^2-5x-6)\div(2x+1)$

3. প্রমাণ কর যে, প্রথম রাশিটি দ্বিতীয়টি দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য :—
(i) $x^3-6x^2+11x-6,\ x-2$ (ii) $x^{12}-1,\ x-1$
(iii) $2x^3+3x^2-5x+12,\ x+3$
(iv) $15x^3-4x^2+15x+6,\ 3x+1$
(v) $6x^3-13x^2y+8xy^2-3y^3,\ 2x-3y$. (iv) $a^{19}+b^{19},\ a+b$.

4. দেখাও যে, $5x-2$ দ্বারা $625x^4-16$ সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। [P. U. '21)

5. প্রমাণ কর যে, $(ax+by)^3+(bx+ay)^3$ রাশিটি $a+b$ ও $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য। [C. U. '21]

6. mএর মান কত হইলে $x^3+6x^2+10x+m$ রাশিটি $x+3$ দ্বারা বিভাজ্য হয়?

7. $x-2$ যদি $120x^3-167x^2-ax+56$এর একটি উৎপাদক হয়, তবে a-র মান কত ? [D. U. 1935]

8. $x^2-3ax+b^2$ যদি $x-a$ দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $2a^2=b^2$.

9. $2x^3-7x^2+5x+p$ এবং $3x^2-11x+17$কে $x-3$ দ্বারা ভাগ করিলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, তবে p-এর মান কত ?

10. যদি n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে 9^n-1, 8 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

11. দেখাও যে $2x+3$ রাশিটি $6x^2+7x-3$এর একটি উৎপাদক।

12. প্রমাণ কর যে, n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $3^{4n}-4^{3n}$ রাশিটি 17 দ্বারা বিভাজ্য।

13. প্রমাণ কর যে, n একটি যুগ্ম অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $2^{6n}-6^{2n}$এর শেষ অঙ্কদ্বয় শূন্য হইবে।

14. প্রমাণ কর যে, n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $3^{2n+1}+2^{2n+1}$এর শেষ অঙ্কটি 5 হইবে।

15. $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

16. $pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m$ কি শর্তে $a-1$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

17. এরূপ শর্ত নির্ণয় কর যাহাতে x^2+px+q এবং $x^2+p'x\times q'$এর $x+a$ আকারের একটি সাধারণ উৎপাদক থাকে।

18. $x+p$ যদি x^2+ax+b ও $x^2+a'x+b'$এর গ. সা. গু. হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $p=\dfrac{b-b'}{a-a'}$ হইবে।

19. প্রমাণ কর যে, $a-b$, $b-c$ ও $c-a$-র প্রত্যেকটি $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$এর উৎপাদক।

20. ax^3+bx^2+cx+dকে $x-p$ দ্বারা ভাগ করিতে থাকিলে x-বর্জিত যে ভাগশেষ পাওয়া যায় সেইটি ভাগ না করিয়া নির্ণয় কর। এই উপপাদ্য সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $x^6+ax^5+cx^3+dx^2-1$ রাশিটি $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে যদি $a+c=d$ হয়। [A. C. 1913]

21. mএর আকার কি হইলে a^n+x^n ও a^n-x^n দুইটিই a^m-x^mএর ভাজক হইতে পারে ? (এখানে n যে-কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা)। [M. U. 1875]

22. n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে, $x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)$ রাশিটি $(x-y)(y-z)(z-x)$ দ্বারা বিভাজ্য।

23. যদি ax^2+bx+c ও cx^2+bx+bএর গ. সা. গু. $x-p$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

উদাহরণমালা 5

নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান কর :

উদা. 1. $\left.\begin{array}{l}7x-3y=31\\9x-5y=41\end{array}\right\}$ [D. B. 1934]

এখানে, $7x-3y=31 \cdots\cdots(1)$
$9x-5y=41 \cdots\cdots(2)$

(1)-কে 5 দ্বারা এবং (2)-কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$35x-15y=155$$
$$27x-15y=123$$

(বিয়োগ করিয়া) $8x=32$, $\therefore\ x=4$.

এক্ষণে (1)-এ x এর মান বসাইয়া পাই $28-3y=31$,

বা, $-3y=3$, $\therefore\ y=-1$, সমাধান হইল $x=4$, $y=-1$.

উদা. 2, $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2 \cdots\cdots(1)\\ \frac{5}{x}+\frac{10}{y}=5\frac{5}{6} \cdots(2)\end{array}\right\}$

(1)-কে 5 দ্বারা এবং (2)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$\frac{10}{x}+\frac{15}{y}=10$$
$$\frac{10}{x}+\frac{20}{y}=\frac{35}{3}$$

(বিয়োগ করিয়া) $-\frac{5}{y}=-\frac{5}{3}$ বা, $\frac{5}{y}=\frac{5}{3}$, $\therefore\ y=3$.

এক্ষণে, (1) হইতে $\frac{2}{x}+\frac{3}{3}=2$, বা, $\frac{2}{x}=2-1=1$, $\therefore\ x=2$.

অতএব, নির্ণেয় সমাধান হইল $x=2$, $y=3$.

উদা. 3. $\frac{x+y}{xy}=2$, $\frac{x-y}{xy}=1$. [D. B. '31]

$$\frac{x+y}{xy}=2 \ldots\ldots(1),\ \frac{x-y}{xy}=1 \ldots\ldots(2)$$

(1) হইতে, $\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}=2$, বা, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=2 \cdots\cdots(3)$

(2) হইতে, $\frac{x}{xy}-\frac{y}{xy}=1$, বা, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1 \cdots\cdots(4)$.

(3)+(4) করিয়া পাই, $\frac{2}{y}=3$, বা, $3y=2$ (বজ্রগুণন দ্বারা), $\therefore \quad y=\frac{2}{3}$.

আবার, (3)−(4) করিয়া পাই, $\frac{2}{x}=1, \quad \therefore \quad x=2$.

অতএব, সমাধান হইল $x=2,\ y=\frac{2}{3}$.

উদা. 4. $\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} &= a+b \cdots\cdots(1) \\ \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2} &= 2 \cdots\cdots\cdots(2) \end{aligned}\right\}$

(1)-কে a দ্বারা এবং (2)-কে a^2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$x+\frac{a}{b}y=a^2+ab \cdots\cdots(3)$$

এবং $x+\frac{a^2}{b^2}y=2a^2 \cdots\cdots\cdots(4)$

$\therefore$ (বিয়োগ) $\frac{ab-a^2}{b^2}y=ab-a^2, \quad \therefore \quad y=\frac{(ab-a^2)\times b^2}{(ab-a^2)}=b^2$.

এক্ষণে (3) হইতে $x+\frac{a}{b}\times b^2=a^2+ab$ [y-এর মান বসাইয়া]

বা, $x+ab=a^2+ab, \quad \therefore \quad x=a^2$, অতএব, $x=a^2,\ y=b^2$.

উদা. 5. $\left.\begin{aligned} x+2y+3z &= 20 \cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x+3y-5z &= -7 \cdots\cdots(2) \\ 4x-5y+7z &= 21 \cdots\cdots\cdots(3) \end{aligned}\right\}$ [C. U. 1898]

(1)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$2x+4y+6z=40$

এবং (2) হইল $2x+3y-5z=-7$

$\therefore$ (বিয়োগ) $y+11z=47 \cdots\cdots(4)$

আবার, (1)-কে 4 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$4x+8y+12z=80$

এবং (3) হইল $4x-5y+7z=21$

$\therefore$ (বিয়োগ) $13y+5z=59 \cdots\cdots(5)$

আবার, (4)-কে 13 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$13y+143z=611$

এবং (5) হইল $13y+5z=59$

$\therefore$ (বিয়োগ) $138z=552, \quad \therefore \quad z=\frac{552}{138}=4$.

এখন, (4) হইতে $y+44=47, \quad \therefore \quad y=47-44=3$.

আবার, (1) হইতে $x+6+12=20, \quad \therefore \quad x=20-18=2$.

$\therefore$ সমাধান হইল $x=2,\ y=3,\ z=4$.

উদা. 6. $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ y+z=7 \\ z+x=6 \end{array}\right\}$

এখানে, $x+y=5 \cdots\cdots(1)$
$y+z=7 \cdots\cdots(2)$
$z+x=6 \cdots\cdots(3)$

$\therefore$ (যোগ) $2(x+y+z)=18$

$\therefore \quad x+y+z=9 \cdots\cdots(4)$

এক্ষণে, $(4)-(1)$ করিলে $z=9-5=4$,

$(4)-(2)$ করিলে $x=9-7=2$,

এবং $(4)-(3)$ করিলে $y=9-6=3$, $\therefore \quad x=2,\ y=3,\ z=4.$

উদা. 7. $\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{2} \cdots(1)$, $\frac{y+z}{yz}=\frac{5}{6} \cdots(2)$, $\frac{z+x}{zx}=1\frac{1}{3} \cdots(3)$.

(1) হইতে পাই $\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}=\frac{3}{2}$, বা, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \cdots(4)$

(2) " " $\frac{y}{yz}+\frac{z}{yz}=\frac{5}{6}$ বা, $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \cdots(5)$

(3) " " $\frac{z}{zx}+\frac{x}{zx}=\frac{4}{3}$, বা, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3} \cdots(6)$

(যোগ করিয়া) $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{11}{3}$.

$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{6} \cdots\cdots(7)$

এক্ষণে, $(7)-(4)$ করিয়া পাই $\frac{1}{z}=\frac{11}{6}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$, $\therefore \quad z=3$

$(7)-(5)$ " " $\frac{1}{x}=\frac{11}{6}-\frac{5}{6}=1$, $\therefore \quad x=1$

এবং $(7)-(6)$ " " $\frac{1}{y}=\frac{11}{6}-\frac{4}{3}=\frac{1}{2}$, $\therefore \quad y=2.$

অতএব, $x=1,\ y=2,\ z=3.$

উদা. 8. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $a^2x+b^2y+c^2z=a^3+b^3+c^3$.

এখানে, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ (মনে কর)

$\therefore \quad x=ak,\ y=bk,\ z=ck \ldots(A)$

অতএব, দ্বিতীয় সমীকরণটি হইতে পাই $a^3k+b^3k+c^3k=a^3+b^3+c^3$,

বা, $(a^3+b^3+c^3)k=a^3+b^3+c^3$,

$\therefore \quad k=\frac{a^3+b^3+c^3}{a^3+b^3+c^3}=1$

অতএব, (A) হইতে পাই $x=a,\ y=b, z=c.$

উদা. 9. $a(x+y)=b(x-y)=2ab.$ [C. U. 1930]

এখানে, $a(x+y)=2ab$......(1)

এবং $b(x-y)=2ab$......(2)

(1) হইতে $x+y=2b$ (উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া)... ...(3)

(2) " $x-y=2a$ (" " b " " ")

∴ (যোগ) $2x=2(a+b)$, ∴ $x=a+b$.

এক্ষণে, (3) হইতে $a+b+y=2b$, ∴ $y=2b-b-a=b-a$.

অতএব, $x=a+b$, $y=b-a$.

উদা. 10. $xy=12$···(1), $yz=20$...(2) এবং $zx=15$...(3)

সমীকরণ তিনটি গুণ করিলে পাই $x^2y^2z^2=12\times20\times15=3600$.

∴ $xyz=\pm\sqrt{3600}=\pm60$......(4)

এক্ষণে, (4)÷(1) করিয়া $\frac{xyz}{xy}=\pm\frac{60}{12}$, বা, $z=\pm5$.

অনুরূপে (4)÷(2) করিয়া $x=\pm3$ এবং (4)÷(3) করিয়া $y=\pm4$.

অতএব, $x=\pm3$, $y=\pm4$, $z=\pm5$.

14. বজ্রগুণন প্রণালী (Method of cross multiplication) :

যদি তিনটি সমীকরণের মধ্যে দুইটির একপক্ষ 0 হয়, তবে এই প্রণালীতে সমাধান সহজ হয়। সেই দুইটি সমীকরণ লইয়া এইভাবে লিখিবে :—

$$\frac{x}{(y\text{এর সহগ}\times z\text{এর সহগ})-(z\text{এর সহগ}\times y\text{এর সহগ})}$$

$$=\frac{y}{(z\text{এর সহগ}\times x\text{এর সহগ})-(x\text{এর সহগ}\times z\text{এর সহগ})}$$

$$=\frac{z}{(x\text{এর সহগ}\times y\text{এর সহগ})-(y\text{এর সহগ}\times x\text{এর সহগ})}$$

কিন্তু এখানে মনে রাখিতে হইবে যে, প্রত্যেক বন্ধনীর মধ্যে প্রথমে যার সহগ আছে, সর্বদা উপরের সমীকরণ হইতে তাহা লইতে হইবে এবং × চিহ্নের পর যার সহগ আছে, সর্বদা তাহা নীচের সমীকরণ হইতে লইতে হইবে। পরবর্তী উদাহরণ হইতে ইহা বুঝিয়া লও।

উদা. 11.
$$\left.\begin{aligned} x-2y+z&=0 \cdots(1)\\ 3x+6y-5z&=0 \ldots(2)\\ 2x+3y+4z&=20\ldots(3)\end{aligned}\right\}$$

(1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা পাই

$$\frac{x}{(-2\times-5)-(1\times6)}=\frac{y}{(1\times3)-(1\times-5)}=\frac{z}{(1\times6)-(-2\times3)}$$

বা, $\frac{x}{10-6}=\frac{y}{3+5}=\frac{z}{6+6}$ বা, $\frac{x}{4}=\frac{y}{8}=\frac{z}{12}$,

বা, $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=k$ (মনে কর), সুতরাং $x=k,\ y=2k,\ z=3k$……(A)

এখন, (3) হইতে পাই $2k+6k+12k=20$, বা, $20k=20$, $\therefore\ k=1$

$\therefore$ (A) হইতে k-এর মান বসাইয়া পাই $x=1,\ y=2,\ z=3$.

উদা. 12. $\left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z=0\ \cdots\cdots(1)\\ ax+by+cz=0\cdots\cdots(2)\\ \frac{x}{b-c}+\frac{y}{c-a}+\frac{z}{a-b}=3\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}$

(1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা পাওয়া যায়

$\frac{x}{c-b}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{b-a}$ বা, $\frac{x}{-(b-c)}=\frac{y}{-(c-a)}=\frac{z}{-(a-b)}$

বা, $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=k$ (মনে কর)

$\therefore\ x=k(b-c),\ y=k(c-a),\ z=k(a-b$ ……(4)

এক্ষণে (3) হইতে পাই $\frac{k(b-c)}{b-c}+\frac{k(c-a)}{c-a}+\frac{k(a-b)}{a-b}=3$,

বা, $k+k+k=3$, বা, $3k=3$, $\therefore\ k=1$.

অতএব, (4) হইতে $x=b-c,\ y=c-a,\ z=a-b$.

উদা 13. $\left.\begin{array}{l} 24x=15y=40z\cdots\cdots(1)\\ 3x+y+2z=29\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$

(1)এর প্রত্যেক পক্ষকে 24, 15 ও 40এর ল.সা.গু. 120 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$\frac{x}{5}=\frac{y}{8}=\frac{z}{3}=k$ (মনে কর), $\therefore\ x=5k,,\ y=8k,\ z=3k$……(A)

এক্ষণে (2) হইতে পাই $15k+8k+6k=29$, বা, $29k=29$, $\therefore\ k=1$.

অতএব, (A) হইতে $x=5,\ y=8,\ z=3$.

উদা 14. $x(x+y+z)=6\ldots(1)$, $y(x+y+z)=12\ldots(2)$
$z(x+y+z)=18\ldots(3)$.

সমীকরণ তিনটি যোগ করিয়া পাই $(x+y+z)(x+y+z)=36$,

বা, $(x+y+z)^2=36$, $\therefore\ x+y+z=\pm6\cdots(4)$

একক্ষণে, (1)-কে (4) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $x=\pm 1$
(2)-কে (4) " " " " $y=\pm 2$
(3)-কে (4) " " " " $z=\pm 3$ (উত্তর)

উদা. 15. $x=t+\frac{1}{t}$, $y^2=t^2+\frac{1}{t^2}$, সমীকরণদ্বয় হইতে t-এর অপনয়ন কর। [D. B. '32]

এক্ষণে, $x^2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2.t.\frac{1}{t}=t^2+\frac{1}{t^2}+2=y^2+2.$

$\therefore \quad x^2-y^2=2.$ অতএব t বর্জন করিয়া সমীকরণটি হইল $x^2-y^2=2.$

Exercise 4

নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান কর :—

1. $\left.\begin{array}{r}3x+5y=69\\ x-2y=1\end{array}\right\}$ [C. U. '19]

2. $\left.\begin{array}{r}6x-7y=16\\ 9x-5y=35\end{array}\right\}$ [C. U. '22]

3. $x+2y=3=4x-y$

4. $x+5y=36, \frac{x+y}{x-y}=\frac{5}{3}.$

5. $\left.\begin{array}{r}\frac{x}{3}-\frac{2}{y}=1\\ \frac{x}{4}+\frac{3}{y}=3\end{array}\right\}$ [A. U. '23]

6. $\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\ 2x+3y+z=4\\ 4x+9y+z=16\end{array}\right\}$ [C.U. '11]

7. $\left.\begin{array}{r}\frac{4}{x}+\frac{10}{y}=2\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}\end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{r}3x+4y=11\\ 5x-2y=1\end{array}\right\}$ [W. B. S. F. '53]

9. $\frac{2x+2y-3}{5}=\frac{3x-7y+4}{6}=\frac{8y-x+2}{7}.$ [C. U.'14]

10. $\left.\begin{array}{r}y+z=6\\ z+x=4\\ x+y=2\end{array}\right\}$ [C. U. '11]

11. $\left.\begin{array}{r}6y-x=1\\ \frac{x+y}{x-y}=\frac{3}{2}\end{array}\right\}$ [C. U. '31]

12. $\frac{x+y}{xy}=5, \frac{x-y}{xy}=9.$ [C. U. '32]

13. $\left.\begin{array}{r}\frac{5}{x}+3y=8\\ \frac{4}{x}-10y=56\end{array}\right\}$ [D. B. '39]

14. $\left.\begin{array}{r}23x-24y=21\\ 25x-16y=43\end{array}\right\}$ [D. B. '36]

15. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6, \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7, \frac{1}{z}-\frac{1}{x}=5.$

16. $\frac{x+y}{xy}=\frac{y+z}{yz}=\frac{z+x}{zx}=\frac{2}{3}.$

17. $\left.\begin{aligned} x-2y+z&=0\\ 9x-8y+3z&=0\\ 2x+3y+5z&=36\end{aligned}\right\}$

18. $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{12}{7},\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{4}{3}.$

19. $\left.\begin{aligned} 6x=8y&=10z\\ 3x-4y+z&=12\end{aligned}\right\}$

20. $xy=24,\ yz=42,\ zx=28.$

. $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}&=6a\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}&=10a\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}&=-2a\end{aligned}\right\}$

22. $\left.\begin{aligned} 2x-5y-3z&=0\\ 3x+3y-z&=0\\ -x+2y+5z&=11\end{aligned}\right\}$

23. $\dfrac{7x+y}{5y-z}=\dfrac{11y-z}{6x-z}=\dfrac{5x-y}{x+1}=2.$

24. $\left.\begin{aligned} &\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\\ &ax+by+cz=a^2+b^2+c^2\end{aligned}\right\}$

25. $\begin{aligned} &x+y+z=0\\ &bcx+cay+abz=0\\ &ax+by+cz+(b-c)(c-a)(a-b)=0\end{aligned}$

26. $\left.\begin{aligned} &ax+by+cz=0\\ &a^2x+b^2y+c^2z=0\\ &x+y+z+(a-b)(b-c)(c-a)=0\end{aligned}\right\}$

27. $\left.\begin{aligned} &x+y+z=a+b+c\\ &ax+by+cz=a^2+b^2+c^2\\ &\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3\end{aligned}\right\}$

28. $\left.\begin{aligned} &\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}\\ &4x+3y+z=30\end{aligned}\right\}$

29. $\left.\begin{aligned} x+y&=3xy\\ y+z&=5yz\\ z+x&=4zx\end{aligned}\right\}$

30. $\left.\begin{aligned} &\frac{2}{x}+\frac{5}{y}-\frac{3}{z}=0\\ &\frac{3}{x}-\frac{12}{y}+\frac{2}{z}=0\\ &4x+y+3z=4\end{aligned}\right\}$

31. $\left.\begin{aligned} &\frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=0\\ &\frac{5}{x}-\frac{6}{y}+\frac{2}{z}=0\\ &2x+3y+4z=6\end{aligned}\right\}$

32. $\begin{aligned} 3x+4y&=5xy\\ 3y+5z&=6yz\\ 2z+3x&=9zx\end{aligned}$

[D. B. '33]

33. $\dfrac{x+ca}{b(c+a)}=\dfrac{y+bc}{a(b+c)}=\dfrac{z+ab}{c(a+b)}+\dfrac{x+y+z}{ab+bc+ca}$

[Hints : প্রথম তিনটি হইতে by addendo পাই

$$\text{Each}=\frac{x+y+z+ab+ac+bc}{2(ab+bc+ca)}=\frac{x+y+z}{ab+bc+ca}$$

$\therefore$ Each$=\dfrac{x+y+z+ab+bc+ca-x-y-z}{2(ab+bc+ca)-(ab+bc+ca)}=1.$

এক্ষণে, প্রত্যেকটি$=1$ ধরিয়া সমাধান কর।]

34. $x(y+z)=5,\ y(z+x)=8,\ z(x+y)=9.$

35. $ax+by=1,\ bx+ay=\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}-1.$ [D. B. '51]

[Hints : সমীকরণ দুইটি যোগ করিয়া $x+y=\dfrac{a+b}{a^2+b^2}$ এবং বিয়োগ করিয়া $x-y=\dfrac{a-b}{a^2+b^2}$ হয়। এই দুইটি আবার যোগ ও বিয়োগ কর......]

36. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3,\ y+z=5yz,\ z+x=4xz.$ [A. U. '43]

37. $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ bx+ay=1+c \end{array}\right\}$ [E.B.S.B. '52]

38. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,\ \dfrac{z}{c}+\dfrac{x}{a}=1.$ [U. U. '48]

[Hints : সমীকরণ তিনটি যোগ করিয়া পাই $2\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=3.$

$\therefore\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{3}{2}.$]

39. $\left.\begin{array}{l} 3x+4y-11=0 \\ 5y-6z=-8 \\ 7z-8x-13=0 \end{array}\right\}$ [C. U. 1877]

40. $\left.\begin{array}{r} x+5y-4z=5 \\ 3x-2y-2z=14 \\ -10x+8y+z=6 \end{array}\right\}$ [C. U. 1867]

41. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=12-\frac{1}{6}z \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}x=8 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}z=10 \end{array}\right\}$ [C. U. 1861]

42 $\left.\begin{array}{r} x-y-z=-15 \\ y+x+2z=40 \\ 4z-5x-6y=-150 \end{array}\right\}$ [C. U. 1886]

43. $\left.\begin{array}{l} 5x-3y+16z=0 \\ 4x+7y=6z \\ 3x-2y+19z=9 \end{array}\right\}$

44. $\left.\begin{array}{l} x+y=axy \\ z+x=bzx \\ z+y=cyz \end{array}\right\}$

45. $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে $\angle A=(2x+13)$ ডিগ্রী, $\angle B=(2y-18)$ ডিগ্রী, $\angle C=(y+31)$ ডিগ্রী, $\angle D=(3x-29)$ ডিগ্রী। x ও yএর মান নির্ণয় কর। [P. U. '32]

15. অনেক বিবিধ প্রশ্ন Algebra-র সাহায্যে সহজে সমাধান করা যায়। প্রশ্নে যদি একের অধিক অজ্ঞাত রাশি থাকে, তবে তাহাদের স্থানে x, y, z প্রভৃতি ধরিয়া প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করিতে হয়। নিম্নে দুই বা তিনটি অজ্ঞাত রাশি সংক্রান্ত সমাধানগুলি দেখ।

উদাহরণমালা 6

উদা. 1. 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল এবং 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত?

মনে কর, পিতার ও পুত্রের বর্তমান বয়স যথাক্রমে x ও y বৎসর। প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই, $x-20=4(y-20)\cdots(1)$ এবং $x+4=2(y+4)\cdots(2)$

(1) হইতে পাই $x-4y=-60\cdots(3)$ এবং (2) হইতে পাই $x-2y=4\cdots(4)$,

(3)−(4) করিয়া পাই $-2y=-64$, $\therefore$ $y=32$. আবার, (4) হইতে পাই $x=4+64=68$ $\therefore$ পিতার বয়স 68 বৎসর ও পুত্রের বয়স 32 বৎসর।

উদা. 2. কোন ভগ্নাংশের লব ও হরে 1 যোগ করিলে উহা $\frac{4}{5}$এ পরিণত হয় এবং লব ও হর হইতে 5 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$এর সমান হয়। ভগ্নাংশটি কত?

মনে কর, ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$. প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই

$$\frac{x+1}{y+1}=\frac{4}{5}\cdots(1) \text{ এবং } \frac{x-5}{y-5}=\frac{1}{2}\cdots(2)$$

(1) হইতে পাই $5x+5=4y+4$, বা, $5x-4y=-1\cdots(3)$

এবং (2) হইতে পাই $2x-10=y-5$, বা, $2x-y=5\ldots(4)$

এখন (3)×1 ও (4)×4 করিয়া পাই,

$$\begin{array}{r} 5x-4y=-\ 1 \\ 8x-4y=\ \ 20 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $-3x=-21$, $\therefore$ $x=7$, এবং (4) হইতে $14-y=5$

বা, $-y=-9$, $\therefore$ $y=9$, $\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{7}{9}$.

উদা. 3. A, Bকে বলিল, 'তোমার বর্তমান বয়সের সমান যখন আমার বয়স ছিল তখন তোমার যে বয়স ছিল আমার বর্তমান বয়স তাহার দ্বিগুণ।' উভয়ের বর্তমান বয়স মোট 63 বৎসর হইলে প্রত্যেকের বয়স কত? [A. U. '31]

মনে কর, **A** ও **B**-এর বর্তমান বয়স যথাক্রমে x ও y বৎসর।

প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই $x+y=63\cdots(1)$

এবং $x=2\{y-(x-y)\}^{*}\cdots(2)$.

(2) হইতে পাই $x=4y-2x$, বা, $3x-4y=0\cdots(3)$.
এখন (1) ও (3) সমাধান করিলে পাই $y=27$. $\therefore$ $x=63-27=36$.
অতএব, A-এর বয়স 36 বৎসর এবং B-এর বয়স 27 বৎসর।

[*A অপেক্ষা Bএর বয়স $(x-y)$ বৎসর কম। $\therefore$ A-র বয়স যখন y বৎসর ছিল তখন B-এর বয়স ছিল $y-(x-y)$ বৎসর।]

উদা. 4. কোন আয়তাকার প্রাঙ্গণের পরিসীমা 60 মিটার। উহার দৈর্ঘ্য 3 মি. অধিক এবং প্রস্থ 3 মি. কম হইলে উহার ক্ষেত্রফল 21 বর্গমিটার কম হয়। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

মনে কর, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে x ও y মিটার। প্রথম শর্ত হইতে $2(x+y)=60$, বা, $x+y=30\cdots(1)$, দ্বিতীয় শর্ত হইতে $(x+3)(y-3)=xy-21$,
বা, $xy-3x+3y-9=xy-21$ বা, $x-y=4\cdots(2)$.
এখন (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $x=17$, $y=13$.
$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=17$ মিটার এবং প্রস্থ $=13$ মিটার।

16. Digits সম্বন্ধীয় সমাধান

উদা. 5. দুই অঙ্কের কোন সংখ্যা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 8 গুণ এবং সংখ্যাটি হইতে 45 বিয়োগ করিলে উহার অঙ্কদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করে। ঐ সংখ্যাটি কত? [C. U. '19]

মনে কর, একক স্থানের অঙ্ক x এবং দশক স্থানের অঙ্ক y, সুতরাং সংখ্যাটি হইল $10y+x$.
প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই $10y+x=8(x+y)\cdots(1)$ এবং
$10y+x-45=10x+y\cdots(2)$ এখন (1) হইতে পাই $2y-7x=0\cdots(3)$
এবং (2) হইতে পাই $9y-9x=45$, বা, $y-x=5\cdots(4)$.
(3) ও (4) সমাধান করিয়া পাই $x=2$ এবং $y=7$.
$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10\times7+2=72$.

[**দ্রষ্টব্য ঃ** Digit বলিতে কেবল x ও y-কে বুঝাইবে, কিন্তু সংখ্যাটি হইবে $10y+x$. যদি শতকের স্থানে z থাকিত, তবে সংখ্যাটি হইত $100z+10y+x$. বালকেরা প্রায়ই number ও digit গোলমাল করিয়া ফেলে।]

উদা. 6. 100 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 6 এবং ঐ অঙ্কগুলি উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্বের সংখ্যা অপেক্ষা 18 কম হইবে। সংখ্যাটি কত? [C. U. '25]

সংখ্যাটি 100 অপেক্ষা কম বলিয়া এখানে উহা দুই অংকের।
মনে কর, এককের অঙ্ক x ও দশকের অঙ্ক y; সুতরাং সংখ্যাটি $10y+x$.
প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই $x+y=6\ldots(1)$
এবং $10x+y=10y+x-18\cdots(2)$.

(2) হইতে পাই $9x-9y=-18$, বা, $x-y=-2\cdots(3)$
এখন (1) ও (3) সমাধান করিলে পাই $x=2$ এবং $y=4$.
$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10\times4+2=42$.

উদা. 7. কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের মধ্যে একটি অন্যটি অপেক্ষা 5 বেশী। অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে নূতন সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার $\frac{3}{8}$ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [D. B. '28]

[N. B. এখানে অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া গেলে নূতন সংখ্যাটি পূর্ব সংখ্যা অপেক্ষা ছোট হয় বলিয়া পূর্বসংখ্যার এককের অঙ্ক দশকের অঙ্ক অপেক্ষা কম আছে বুঝা যায়। আর, অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া দিলে নূতন সংখ্যাটি যদি আগের সংখ্যা অপেক্ষা বেশী হয়, তবে পূর্বসংখ্যার এককের অঙ্ক বড় আছে বুঝিবে।]

মনে কর, এককের অঙ্ক x ও দশকের অঙ্ক y, সুতরাং সংখ্যাটি $=10y+x$.
প্রদত্ত শর্ত হইতে $y-x=5\ldots(1)$ এবং $10x+y=\frac{3}{8}(10y+x)\ldots(2)$.
(2) হইতে পাই $80x+8y=30y+3x$, বা, $77x-22y=0$,
বা, $7x-2y=0\ldots(3)$ এক্ষণে, (1) ও (3) সমাধান করিলে $x=2$, $y=7$.
$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=7\times10+2=72$.

উদা. 8. তিন অঙ্কের কোন সংখ্যার অঙ্ক তিনটির সমষ্টি 10 এবং মাঝের অঙ্কটি অন্য অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সমান। প্রথম ও তৃতীয় অঙ্কদ্বয় পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে সংখ্যাটি 99 বাড়িয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. '23]

[**দ্রষ্টব্য :** মনে কর. 325 একটি সংখ্যা। ইহার first digit বলিলে 3-কে বুঝাইবে (5-কে নহে) ; কারণ, 325 সংখ্যাটি লিখিবার সময় আমরা প্রথমে 3, তারপর 2, তারপর 5 লিখি এবং পড়িও বামদিক হইতে।]

মনে কর, একক, দশক ও শতকের অঙ্ক যথাক্রমে x, y, z ;
সুতরাং সংখ্যাটি $=100z+10y+x$.
প্রদত্ত শর্তগুলি হইতে পাই $x+y+z=10\ldots(1)$, $x+z=y\cdots(2)$
এবং $100x+10y+z=100z+10y+x+99\cdots(3)$
(1) ও (2) হইতে $x+(x+z)+z=10$,
বা, $2(x+z)=10$, বা, $x+z=5\cdots(4)$
(3) হইতে $99x-99z=99$, বা, $x-z=1\cdots(5)$
এখন (4) ও (5) সমাধান করিলে $x=3$, $z=2$ হয়, সুতরাং $y=5$.
$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=2\times100+5\times10+3=253$.

উদা. 9. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার প্রত্যেক অঙ্ক উহার পূর্ববর্তী অঙ্ক অপেক্ষা 2 বেশী। সংখ্যাটি হইতে 16 বিয়োগ করিলে অন্তরফলটি অঙ্কগুলির সমষ্টির 20 গুণ অপেক্ষা 10 কম হয়। সংখ্যাটি কত ?

মনে কর, শতকের অঙ্ক x, সুতরাং প্রদত্ত শর্ত হইতে দশকের অঙ্ক $x+2$ এবং এককের অঙ্ক $x+4$ হইবে।

অতএব সংখ্যাটি $=100x+10(x+2)+(x+4)=111x+24$.
এখন দ্বিতীয় শর্ত হইতে পাই $111x+24-16=20(x+x+2+x+4)-10$,
বা, $111x+8=60x+110$, বা, $51x=102$, $\therefore\ x=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=111\times2+24=246$.

17. **স্রোত ও নৌকার গতি :** স্থির জলে অর্থাৎ নদীতে স্রোত না থাকিলে নৌকার গতিবেগ যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়। যদি স্রোত থাকে, তবে (1) স্রোতের অনুকূলে (with the stream or current, down-stream, down the river) যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির সমষ্টি যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়, কিন্তু (2) স্রোতের প্রতিকূলে বা বিপরীত দিকে (against the current, up-stream or up the river) যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির অন্তর যত, নৌকা এক ঘণ্টায় ততদূর যায়।

উদা. 10. একটি নৌকা প্রতিকূল স্রোতে 30 মাইল ও অনুকূল স্রোতে 44 মাইল মোট 10 ঘণ্টায় যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে 40 মাইল ও অনুকূলে 55 মাইল মোট 13 ঘণ্টায় যায়। স্রোতের ও নৌকার গতিবেগ নির্ণয় কর। [D. B. '33]

এখানে মনে কর, নৌকার গতি ঘণ্টায় x মাইল এবং স্রোতের গতি ঘণ্টায় y মাইল, সুতরাং স্রোতের অনুকূলে নৌকা ঘণ্টায় $x+y$ মাইল এবং স্রোতের প্রতিকূলে ঘণ্টায় $x-y$ মাইল যায়।

এক্ষণে প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই $\dfrac{30}{x-y}+\dfrac{44}{x+y}=10\cdots(1)$

এবং $\dfrac{40}{x-y}+\dfrac{55}{x+y}=13\ldots(2)$

(1)×4 ও (2)×3 করিয়া পাই $\dfrac{120}{x-y}+\dfrac{176}{x+y}=40$

এবং $\dfrac{120}{x-y}+\dfrac{165}{x+y}=39$

(বিয়োগ করিয়া) $\dfrac{11}{x+y}=1$, $\therefore\ x+y=11\ldots(3)$

এখন (1)-এ $x+y$এর মান বসাইয়া পাই $x-y=5\cdots(4)$.

(3) ও (4) সমাধান করিলে পাই $x=8$, $y=3$.

অতএব, নৌকার গতি ঘণ্টায় 8 মাইল এবং স্রোতের গতি ঘণ্টায় 3 মাইল।

উদা. 11. এক ব্যক্তি স্থির জলে ঘণ্টায় 5 মাইল নৌকা বাহিয়া যায়। স্রোতের অনুকূলে 40 মাইল যাইতে তাহার যে সময় লাগে স্রোতের প্রতিকূলে 40 মাইল যাইতে তাহার 3 গুণ সময় লাগে। স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর। [C U. '35]

মনে কর, নদীর বা স্রোতের গতি ঘণ্টায় x মাইল, সুতরাং নৌকাটি স্রোতের প্রতিকূলে (up the river) ঘণ্টায় $5-x$ মাইল এবং স্রোতের অনুকূলে (down) ঘণ্টায়

$5+x$ মাইল যায়। $\therefore$ 40 মাইল স্রোতের প্রতিকূলে ও অনুকূলে যাইতে যথাক্রমে $\frac{40}{5-x}$ ও $\frac{40}{5+x}$ ঘণ্টা লাগে।

এখন প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই, $\frac{40}{5-x}=3\times\frac{40}{5+x}$, বা, $\frac{1}{5-x}=\frac{3}{5+x}$,

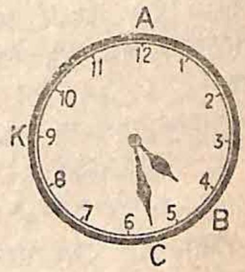
বা, $5+x=15-3x$, বা, $4x=10$, $\therefore$ $x=2\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় নদীর গতি ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ মাইল।

18. **ঘড়ি সম্বন্ধীয় সমাধান :** ঘড়ির dial-টিকে ছোট ছোট 60 ভাগে বিভক্ত করা আছে। এক একটি ভাগকে মিনিট-ঘর বা minute space বা minute division বলে। মিনিটের কাঁটা যতক্ষণে 60 মিনিট-ঘর যায় ঘণ্টার কাঁটা ততক্ষণে 5 মিনিট-ঘর যায়।

উদা. 12 এক ব্যক্তি গৃহ হইতে 4টা ও 5টার মধ্যে বাহির হইয়া 5টা ও 6টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল তাহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিয়াছে। সে কখন বাহির হইয়াছিল? [C. U. '30, Addl. ; '51]

মনে কর, লোকটি 4টা x মিনিটের সময় বাহিরে গিয়াছিল, এবং ঐ সময় ঘণ্টার কাঁটা 4টা ও 5টার মধ্যে B বিন্দুতে এবং মিনিটের কাঁটা 5টা ও 6টার মধ্যে C বিন্দুতে ছিল। এখন 4টা x মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা 12টার ঘর হইতে x মিনিট-ঘর এবং ঘণ্টার কাঁটা 4টার ঘর হইতে $\frac{1}{12}x$ মিনিট ঘর আগাইয়া ছিল। এখন চিত্রে দেখ—



চাপ $AC=x$ মিনিট-ঘর,

চাপ $AB=20+\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর।

চাপ $CKA=60-x$ „ „

চাপ $BC=x-(20+\frac{x}{12})$ মিনিট-ঘর।

লোকটি যতক্ষণ বাহিরে ছিল ততক্ষণে মিনিটের কাঁটা CKAB চাপ অর্থাৎ $(60-x+20+\frac{x}{12})$ মিনিট ঘর গিয়াছে এবং ঘণ্টার কাঁটা BC চাপ অর্থাৎ $x-(20+\frac{x}{12})$ মিনিট-ঘর গিয়াছে।

একই সময়ে মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 12 গুণ যায়।

$\therefore$ $60-x+20+\frac{x}{12}=12\{x-(20+\frac{x}{12})\}$

বা, $80-\frac{11x}{12}=11x-240$, বা, $\frac{143}{12}x=320$, $\therefore$ $x=\frac{3840}{143}=26\frac{122}{143}$

অতএব, সে ব্যক্তি 4টা $26\frac{122}{143}$ মিনিটের সময় বাহির হইয়াছিল।

উদা. 13. এক ব্যক্তি অপরাহ্ন 3টা ও 4টার মধ্যে গৃহ হইতে বাহির হইয়া 4টা ও 5টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিলেন তাঁহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিয়াছে। তিনি কখন বাহির হইয়াছিলেন, কখন ফিরিয়া আসেন এবং কতক্ষণ বাহিরে ছিলেন? [Cf. C. U. '42

[**দ্বিতীয় প্রণালী**] মনে কর, লোকটি 3টা বাজিয়া x মিনিটে বাহির হন এবং 4টা বাজিয়া y মিনিটে ফিরিয়া আসেন। মিনিটের কাঁটা যতক্ষণে x ও y মিনিট ঘর যায়, ঘণ্টার কাঁটা ততক্ষণে $\frac{x}{12}$ এবং $\frac{y}{12}$ মিনিট-ঘর যায়। অতএব তিনি বাহির হইবার সময় ঘণ্টার কাঁটা 12টার ঘর হইতে $15+\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর দূরে ছিল এবং 4টা y মিনিটে ফিরিয়া দেখেন মিনিটের কাঁটা সেই ঘরে আছে। $\therefore\ y=15+\frac{x}{12}\cdots(1)$. আবার, ফিরিবার সময় ঘণ্টার কাঁটা 12টার ঘর হইতে $20+\frac{y}{12}$ মিনিট-ঘর দূরে আছে, পূর্বে ঐ স্থানে মিনিটের কাঁটা ছিল। $\therefore\ x=20+\frac{y}{12}\cdots(2)$.

(1) ও (2) সমাধান করিলে পাই $x=21\frac{57}{143}$ এবং $y=16\frac{112}{143}$.

$\therefore$ লোকটি 3টা $21\frac{57}{143}$ মিনিটে বাহির হইয়া 4টা $16\frac{112}{143}$ মিনিটে ফিরিয়াছেন এবং ঐ দুই সময়ের অন্তর অর্থাৎ $55\frac{5}{13}$ মিনিট বাহিরে ছিলেন।

[বিবিধ]

উদা. 14 এক ব্যক্তি একটি দ্রব্য কিনিয়া উহা 6% লাভে বিক্রয় করিল। সে যদি উহা 4% কম মূল্যে কিনিয়া আরও 2 টাকা 6 আনা বেশী মূল্যে বেচিত, তবে তাহার 12% লাভ হইত। সে উহা কত দিয়া কিনিয়াছিল? [C.U. '44]

মনে কর, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য x টাকা। উহা 6% লাভে বিক্রয় করিলে বিক্রয়মূল্য হইবে $\frac{106}{100}x$ টাকা। আর উহা 4% কম মূল্যে কেনা থাকিলে ক্রয়মূল্য হইত $\frac{96}{100}x$ টাকা এবং $\frac{96}{100}x$ টাকার দ্রব্য বিক্রয় করিয়া 12% লাভ করিলে বিক্রয়মূল্য হইত $\frac{112}{100}\times\frac{96}{100}x$ টাকা, এই বিক্রয়মূল্য কিন্তু প্রথম বিক্রয়মূল্য অপেক্ষা 2 টা. 6 আ বা $\frac{19}{8}$ টাকা বেশী বলা আছে।

$\therefore\ \frac{112\times96}{100\times100}x=\frac{106}{100}x+\frac{19}{8}$, বা, $\frac{672}{625}-\frac{53x}{50}=\frac{19}{8}$, বা, $\frac{19x}{1250}=\frac{19}{8}$,

$\therefore\ x=\frac{19}{8}\times\frac{1250}{19}=156\frac{1}{4}$. $\therefore$ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য $=156$ টাকা 4 আনা।

উদা. 15. দুইটি পাত্রে দুধ ও জল যথাক্রমে 2 : 3 ও 5 : 4 অনুপাতে মিশান আছে। ঐ পাত্রের মিশ্রিত দ্রব্য কি অনুপাতে লইয়া একত্র মিশাইলে নূতন মিশ্রণে দুধ ও জলের পরিমাণ সমান হইবে?

মনে কর, প্রথমটি হইতে x পরিমাণ ও দ্বিতীয়টি হইতে y পরিমাণ দ্রব্য লওয়া হইল। প্রথমটির x পরিমাণের মধ্যে দুধ আছে $\frac{2}{5}x$ এবং জল আছে $\frac{3}{5}x$. দ্বিতীয়টির y পরিমাণের মধ্যে দুধ $\frac{5}{9}y$ ও জল $\frac{4}{9}y$ পরিমাণ।

$\therefore\ (x+y)$ পরিমাণ মিশ্রণের মধ্যে জলের পরিমাণ $\frac{2}{5}x+\frac{5}{9}y$
এবং জলের পরিমাণ $\frac{3}{5}x+\frac{4}{9}y$;

$\therefore\ \frac{2}{5}x+\frac{5}{9}y=\frac{3}{5}x+\frac{4}{9}y$, বা, $\frac{5}{9}y-\frac{4}{9}y=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}x$,

বা, $\frac{y}{9}=\frac{x}{5}$, $\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{5}{9}$ $\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=5:9$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে যদি শেষ মিশ্রণে দুধ ও জল সমান সমান না বলিয়া 3 : 4 বা অন্য অনুপাত বলা থাকিত তবে $\frac{\frac{2}{5}x+\frac{5}{9}y}{\frac{3}{5}x+\frac{4}{9}y}=\frac{3}{4}$ এইরূপ লিখিয়া $x : y$ কত হয় নির্ণয় করিতে হইত।]

উদা. 16. এক ব্যক্তি কোন সময়ে কিছুদূর ভ্রমণ করিল। সে যদি ঘণ্টায় $\frac{1}{2}$ কিলোমিটার অধিক বেগে চলিত তবে $\frac{4}{5}$ অংশ সময় লাগিত; কিন্তু যদি ঘণ্টায় $\frac{1}{2}$ কিলোমিটার কম বেগে চলিত, তবে $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা অধিক সময় লাগিত। সে কতদূর ভ্রমণ করিয়াছিল ?

মনে কর, মোট দূরত্ব x মাইল এবং লোকটি ঘণ্টায় y মাইল বেগে চলিয়াছিল।

$\therefore$ সে x মাইল গিয়াছিল $\frac{x}{y}$ ঘণ্টায়। অতএব প্রদত্ত শর্তগুলি হইতে পাই

$$\frac{x}{y+\frac{1}{2}}=\frac{x}{y}\times\frac{4}{5}\cdots\cdots(1) \text{ এবং } \frac{x}{y-\frac{1}{2}}=\frac{x}{y}+2\tfrac{1}{2}\ldots\ldots(2).$$

এক্ষণে (1) হইতে $\frac{1}{y+\frac{1}{2}}=\frac{4}{5y}$, বা, $5y=4y+2$, $\therefore\ y=2.$

$\therefore$ (2) হইতে $\frac{x}{2-\frac{1}{2}}=\frac{x}{2}+2\frac{1}{2}$, বা, $\frac{2x}{3}=\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$, বা, $4x=3x+15$,

$\therefore\ x=15.$ $\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=15$ মাইল।

উদা. 17. কোন নির্বাচনে দুইজন প্রতিদ্বন্দ্বীর সমর্থক ভোটারগণকে যথাক্রমে 10 জন ও 15 জন ভোটার ধারণক্ষম দুই প্রকার গাড়ীতে ভোট দিতে লইয়া যাওয়া হয়। এইভাবে 1050 জন ভোটার ঠিক 85টি গাড়ীতে গিয়া ভোট দেয়। কত ভোটে ঐ নির্বাচনে জয়লাভ হয় তাহা নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম ও দ্বিতীয় ব্যক্তির ভোটার সংখ্যা যথাক্রমে x ও y.

অতএব, প্রদত্ত শর্তদ্বয় হইতে পাই, $x+y=1050\cdots(1)$.

আবার, $\because$ প্রথম ব্যক্তির ভোটারদের জন্য $\frac{x}{10}$ সংখ্যক গাড়ী ও দ্বিতীয় ব্যক্তির ভোটারদের জন্য $\frac{y}{15}$ সংখ্যক গাড়ী লাগে, $\therefore\ \frac{x}{10}+\frac{y}{15}=85\cdots(2)$.

এক্ষণে (1) ও (2) সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $x=450$, $y=600$.

অতএব, দ্বিতীয় ব্যক্তি $(600-450)$ বা 150 ভোট বেশী পাইয়া জয়লাভ করিয়াছে।

Exercise 5

1. দশ বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 7 গুণ ছিল এবং দুই বৎসর পরে তাহার বয়সের দ্বিগুণ পুত্রের বয়সের 5 গুণ হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত ? [C. U. '20]

2. এক ব্যক্তি মোটরে 6 ঘণ্টায় 80 মাইল ভ্রমণ করিল। সে উহার প্রথমাংশ ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে এবং শেষাংশ ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে গেল। সে কোন্ বেগে কত মাইল গিয়াছিল ? [C. U. '18, '29]

3. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি সংখ্যাটি অপেক্ষা 54 কম। অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্ব সংখ্যা অপেক্ষা 27 বেশী। প্রদত্ত সংখ্যাটি কত? [P. U. '35]

4. দুইটি সংখ্যার গুণফল 18225 এবং বৃহত্তর সংখ্যাটিকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিলে 81 ভাগফল হয়। সংখ্যা দুইটি কত? [C. U. '45]

5. এরূপ একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর যাহার লব হইতে 1 বিয়োগ ও হরে 2 যোগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$এর সমান হয় এবং লব হইতে 7 ও হর হইতে 2 বিয়োগ করিলে $\frac{1}{3}$এর সমান হয়। [C. U. '28]

6. দুই অঙ্কের কোন সংখ্যার দশকের অঙ্ক এককের অঙ্কের 3 গুণ। সংখ্যাটি হইতে 54 বিয়োগ করিলে উহার অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. '43]

7. 10 ও 100এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা উহার অঙ্কগুলির সমষ্টির 8 গুণ। উহা হইতে 45 বিয়োগ করিলে অঙ্কগুলি উল্টাইয়া যাইবে। সংখ্যাটি কত? [C.U. '19]

8. কোন সংখ্যার অঙ্কগুলি উল্টাইয়া লিখিলে সংখ্যাটির $\frac{5}{6}$এর সমান হইবে এবং অঙ্কদ্বয়ের অন্তরফল 1; সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. 1883; '49 Sup.]

9. এক ব্যক্তি 5টা ও 6টার মধ্যে সান্ধ্য ভ্রমণে বাহির হন এবং 6টা ও 7টার মধ্যে ফিরিয়া দেখিলেন তাঁহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিয়াছে। লোকটি কখন বাহির হইয়াছিলেন? [C. U. '44]

10. একটি বালক তাহার অর্থে লেবু কিনিল। ঐ অর্থে 4টি লেবু বেশী পাইলে গড়ে প্রত্যেকটির মূল্য $\frac{1}{2}$ পেন্স কম হইত এবং তিনটি লেবু কম পাইলে গড়ে প্রত্যেকটির মূল্য $\frac{1}{2}$ পেন্স বেশী হইত। সে কত ব্যয় করিয়াছিল? [P. U. '21 Addl.]

11. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 কি. মি. বেগে নৌকা চালাইয়া স্রোতের অনুকূলে যতক্ষণে 30 কি.মি. যায় স্রোতের প্রতিকূলে উহার 3 গুণ সময়ে ঐ পথ যায়। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

12. একটি মিশ্রণে দুধ ও জলের অনুপাত 5 : 3 এবং অন্য একটিতে 4 : 5; ঐ দুই মিশ্রণ হইতে কি অনুপাতে পুনরায় মিশাইলে দুধ ও জলের অনুপাত 31 : 29 হইবে?

13. 20 টাকা গ্রাম দরের কি পরিমাণ সোনার সহিত 15 টাকা গ্রাম দরের 14 গ্রাম সোনা মিশাইলে 1 গ্রাম মিশ্রিত সোনার মূল্য 18 টাকা হইবে?

14. এক ব্যক্তি সাইকেলে 100 মাইল যে সময়ে গিয়াছে আরও 2 মাইল অধিকতর বেগে যাইলে তাহা অপেক্ষা 1 ঘণ্টা 40 মিনিট কম সময় লাগিত। তাহার কত সময় লাগিয়াছিল? [P. U. '25]

15. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার এককের অঙ্ক দশকের অঙ্কের 4 গুণ। উহার অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিয়া নূতন সংখ্যাটির সহিত 2 যোগ করিলে পূর্ব সংখ্যার 3 গুণ হইবে। সংখ্যাটি কত? [C. U. 1901]

28. দুইটি সংখ্যার বৃহত্তরটিকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল ও ভাগশেষ উভয়ই 4 হয় এবং ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটির 20 গুণকে বৃহত্তর সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিলে ঐ একই ফল হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

29. 132 গজের দৌড়ে A, B-কে 176 গজ আগাইয়া দিয়া 15 সেকেণ্ডে পরাজিত করে, কিন্তু যদি B 1 মিনিট আগে দৌড়াইতে আরম্ভ করে, তবে A-কে 110 গজে হারায়। এক মাইল দৌড়াইতে A ও B-এর কত সময় লাগে ?

30. 88 গজ দীর্ঘ একটি ট্রেণ সমান্তরাল পথে একই দিকে ধাবমান 110 গজ দীর্ঘ একটি ট্রেণকে 27 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল ; কিন্তু যদি মন্থরগামী ট্রেণটি তাহার দেড়গুণ গতিতে যাইত, তবে উহাকে অতিক্রম করিতে ঐ সময়ের দ্বিগুণ সময় লাগিত। ট্রেণ দুইটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

Theory of Indices (সূচক-প্রকরণ)

19. সূচক। a^3, a^m প্রভৃতিতে aএর ঘাত যাহা দ্বারা সূচিত হইয়াছে (এখানে 3, m প্রভৃতি) তাহাকে সূচক বলে। a^3এর অর্থ $a\times a\times a$ (তিনটি aএর গুণফল) a^mএর অর্থ $a\times a\times a......m$ সংখ্যক aএর গুণফল।

সূচক সম্বন্ধীয় নিম্নের নিয়মগুলি ভালরূপে শিখিতে হইবে।

নিয়ম 1. যদি m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$a^m\times a^n=a^{m+n}$. [C. U. '10, '30 ; D. B. '30 ; Pat. U. '21]

$a^m=a\times a\times a\times\cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$a^n=a\times a\times a\times......n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$\therefore$ $a^m\times a^n=(a\times a\times a\times ......m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত$)$

$\times(a\times a\times......n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত$)$

$=a\times a\times a\times\cdots\cdots(m+n)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$=a^{m+n}$.

[**দ্রষ্টব্য :** এই নিয়মটিকে **Fundamental Index Law** বলে। এই নিয়মানুসারে p অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n+p}$ হইবে। উৎপাদকের সংখ্যা আরও থাকিলে এই নিয়মে কার্য হইবে।]

নিয়ম 2. যদি m ও n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $m>n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^m\div a^n=a^{m-n}$.

$$a^m\div a^n=\frac{a^m}{a^n}=\frac{a\times a\times a\times\cdots\cdots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{a\times a\times a\times\cdots\cdots n \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}$$

$=a\times a\times a\times\cdots\ (m-n)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$=a^{m-n}$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে নীচের সব aগুলি উপরের n সংখ্যক a-র সহিত কাটিয়া গিয়া উপরে এখনও $(m-n)$ সংখ্যক a বাকী থাকিল। মনে রাখিবে ভাগে সূচকগুলি বিয়োগ করিতে হয়। এখানে যদি n বড় হইত, তবে $\frac{1}{a^{n-m}}$ উত্তর হইত।]

কোন রাশির ঘাতের সূচক ঋণ সংখ্যা বা ভগ্নাংশ হইলে কি হয় দেখ। $a^{-4}=a\times a\times\cdots(-4)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত, কিন্তু ইহা অর্থহীন ; কারণ, a-কে -4 সংখ্যক বার লইয়া ক্রমিক গুণফল নির্ণয় করা যায় না। সূচক ভগ্নাংশ হইলেও ঐরূপ অর্থহীন হয়। এইরূপ সূচকবিশিষ্ট রাশির অর্থ নিম্নে দেখ।

(i) a^0এর মান কত ?

আমরা জানি $a^m\times a^n=a^{m+n}$, এখানে মনে কর $n=0$.

অতএব, $a^m\times a^0=a^{m+0}=a^m$, $\therefore\ a^0=\frac{a^m}{a^m}=1.$

[অন্য প্রণালী : $a^0=a^{m-m}=\frac{a^m}{a^m}=1$]

[দ্রষ্টব্য : 0 সূচকবিশিষ্ট যে-কোন সংখ্যার মান 1 হইবে।]

(ii) ঋণাত্মক (অর্থাৎ − চিহ্নযুক্ত) সূচকের অর্থ নির্ণয় :—

প্রমাণ কর যে, $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

$\because\ a^m\times a^n=a^{m+n}$, $\therefore\ a^m\times a^{-m}=a^{m-m}$($n=-m$ ধরিয়া)$=a^0=1$,

$\therefore\ a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

[দ্রষ্টব্য : অনুরূপে $a^m=\frac{1}{a^{-m}}$. কোন ঋণাত্মক সূচকযুক্ত সংখ্যা উহারই ধনাত্মক সূচকযুক্ত অন্যোন্যকের সমান হয়। অর্থাৎ $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$ $\frac{1}{a^{-3}}=a^3$.]

নিয়ম : 3 প্রমাণ কর যে, $(a^m)^n=a^{mn}$.

$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$=a^{m+m+m}+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=a^{mn}$.

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $(a^{mn})^p=a^{mnp}$; $(a^m)^{np}=a^{mnp}$.

(i) $a^{\frac{m}{n}}$এর দ্বারা কি বুঝায় ?

$\because\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m$, $\therefore\ a^{\frac{m}{n}}$কে a^mএর n-তম মূল (n^{th} root) বলা যায়।

আবার, $\because\ a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, $\therefore\ a^{\frac{m}{n}}$কে $a^{\frac{1}{n}}$এর m ঘাত (m^{th} power) বলা যায়।

[দ্রষ্টব্য : কোন সংখ্যার সূচক ভগ্নাংশ হইলে ঐ সূচকের লবকে সংখ্যাটির ঘাত (power) এবং হরকে সংখ্যাটির মূল (root) ধরিতে হয়। সুতরাং, $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$; $a^{\frac{2}{5}}=(\sqrt[5]{a})^2=(a^{\frac{1}{5}})^2$; এবং $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[p]{a^q}=a^{\frac{q}{p}}$ এইভাবে লেখা যায়।]

নিয়ম : 4. প্রমাণ কর যে, $(ab)^m=a^m b^m$ [C. U. '31 ; D. B. '22]

$(ab)^m=ab\times ab\times ab\times\ldots\ldots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$=(a\times a\times a\times\cdots\cdots\times m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত$)\times$

$(b\times b\times b\times\ldots\ldots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত$)=a^m\times b^m=a^m b^m$.

নিয়ম : 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$$=\frac{a\times a\times a\times\cdots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{b\times b\times b\times\cdots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}=\frac{a^m}{b^m}.$$

7নং উদাহরণমালায় উপরোক্ত নিয়মাবলীর প্রয়োগ দেখ।

উদাহরণমালা 7

উদা. 1. মান নির্ণয় কর : $a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}.a^{-\frac{1}{6}}.a^{-\frac{2}{3}}$

প্রদত্ত রাশি$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^{\circ}=1.$

উদা. 2. $(x^2y)^{\frac{1}{4}}\times(x^3)^{\frac{1}{2}}\times(x^{-4}y^{-1})^{\frac{1}{2}}=$ কত ?

প্রদত্ত রাশি$=x^{2\times\frac{1}{4}}.y^{1\times\frac{1}{4}}.x^{3\times\frac{1}{2}}.x^{-4\times\frac{1}{2}}.y^{-1\times\frac{1}{2}}$

$$=x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{3}{2}}.x^{-2}.y^{-\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2}.y^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=x^0y^{-\frac{1}{4}}$$

$$=1\times y^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{y^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{y}}.$$

উদা. 3. $\sqrt[3]{27^2}$এর মান নির্ণয় কর।

$\sqrt[3]{27^2}=(27)^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{3\times\frac{2}{3}}=3^2=9.$

উদা. 4. $32^{-\frac{4}{5}}$এর মান নির্ণয় কর।

$$32^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{32^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{(2^5)^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{2^{5\times\frac{4}{5}}}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}.$$

উদা. 5. $$4a^{-\frac{3}{4}} \div 3b^{-\frac{2}{3}} = \frac{4a^{-\frac{3}{4}}}{3b^{-\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{4\times 1}{a^{\frac{3}{4}}}}{\frac{3\times 1}{b^{\frac{2}{3}}}} = \frac{4}{3} \times \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{4\sqrt[3]{b^2}}{3\sqrt[4]{a^3}}$$

[দ্রষ্টব্য : এখানে লবের 4এর ঘাত-সূচক 1, $-\frac{3}{4}$ নহে ; যদি $(4a)^{-\frac{3}{4}}$ থাকিত, তবে 4এর সূচকও $-\frac{3}{4}$ হইত। হরের 3এর সূচকও 1.]

উদা. 6. গুণফল নির্ণয় কর :

$$\left(x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}}\right).$$

প্রদত্ত রাশি $= \left(x^{2^{n-1}}\right)^2 - \left(y^{2^{n-1}}\right)^2 = x^{2^{n-1}\times 2^1} - y^{2^{n-1}\times 2^1}$

$$= x^{2^{n-1+1}} - y^{2^{n-1+1}} = x^{2^n} - y^{2^n}.$$

[দ্রষ্টব্য : $2n$ এবং 2^n এক নহে। $2n$এর অর্থ nএর সহিত 2এর গুণফল এবং 2^nএর অর্থ 2এর n ঘাত। $2^{n-1} \times 2 = 2^{n-1+1} = 2^n$ সুতরাং $x^{2^{n-1}}$কে বর্গ করিলে x^{2^n} হয়।

উদা. 7. $x^{2^n} - y^{2^n}$কে $x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}$ দিয়া ভাগ কর। [C. U.]

$$\frac{x^{2^n} - y^{2^n}}{x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}} = \frac{\left(x^{2^{n-1}}\right)^2 - \left(y^{2^{n-1}}\right)^2}{x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}}$$

$$= \frac{\left(x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}}\right)}{x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}} = x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}}.$$

উদা. 8. সরল কর : $\left(\frac{a^l}{b^m}\right)^n \left(\frac{b^n}{c^l}\right)^m \left(\frac{c^m}{a^n}\right)^l$. [C. U. '13]

প্রদত্ত রাশি $= \frac{a^{ln}}{b^{mn}} \times \frac{b^{nm}}{c^{lm}} \times \frac{c^{ml}}{a^{nl}} = 1.$

উদা. 9. $(x^a)^{b-c}(x^b)^{c-a}(x^c)^{a-b}$কে সরল কর। [C. U. '33]

প্রদত্ত রাশি $= x^{ab-ac} . x^{bc-ab} . x^{ca-bc}$

$$= x^{ab-ac+bc-ab+ac-bc} = x^0 = 1.$$

উদা. 10. সরল কর : $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}.\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}.\left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l}$.

[C. U. '16, '21, '24 ; D. B. '25, '30 ; G. U. '48, '50.]

প্রদত্ত রাশি $=(x^{l-m})^{l+m}.(x^{m-n})^{m+n}.(x^{n-l})^{n+l}$

$=x^{l^2-m^2}.x^{m^2-n^2}.x^{n^2-l^2}=x^{l^2-m^2+m^2-n^2+n^2-l^2}=x^0=1.$

[দ্রষ্টব্য : $\frac{x^l}{x^m}$এর অর্থ x^l কে x^m দ্বারা ভাগ। ভাগে সূচকের বিয়োগ হয়, সুতরাং $\frac{x^l}{x^m}=x^{l-m}$ হইল। এইভাবে করিতে হয়।]

উদা. 11. সরল কর : $\frac{(bc)^{b-c}(ca)^{c-a}(ab)^{a-b}}{(a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b})^{-1}}$. [D.B. '45]

প্রদত্ত রাশি $=b^{b-c}.c^{b-c}.c^{c-a}.a^{c-a}.a^{a-b}.b^{a-b}\times a^{b-c}.b^{c-a}.c^{a-b}$

$=a^{a-b+b-c+c-a}.b^{b-c+a-b+c-a}.c^{b-c+c-a+a-b}$

$=a^0.b^0.c^0=1\times1\times1=1.$

[দ্রষ্টব্য : $\because\ \frac{1}{a^{-2}}=a^2$ হয়, $\therefore$ এখানে সমগ্র হরের ঘাত ঋণাত্মক অর্থাৎ -1 বলিয়া তাহাকে লব করিয়া লিখিলে ঘাত ধনাত্মক হইবে।]

উদা. 12. $\sqrt[bc]{\frac{x^b}{x^c}}\times\sqrt[ca]{\frac{x^c}{x^a}}\times\sqrt[ab]{\frac{x^a}{x^b}}$ কে সরল কর।

[C. U. '20, '41 ; W. B. S. F. '52 ; D. B. '28, '49]

প্রদত্ত রাশি $=\sqrt[bc]{x^{b-c}}.\ \sqrt[ca]{x^{c-a}}.\ \sqrt[ab]{x^{a-b}}.$

$=x^{\frac{b-c}{bc}}.x^{\frac{c-a}{ca}}.x^{\frac{a-b}{ab}}=x^{\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}+\frac{a-b}{ab}}$

$=x^{\frac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{abc}}=x^{\frac{0}{abc}}=x^0=1.$

[দ্রষ্টব্য : প্রথমটি দেখ। Root-চিহ্নের ভিতরটি প্রথমে কষিয়া হইল $\sqrt[bc]{x^{b-c}}$, ইহা দ্বারা বুঝায় bc^{th} root of x^{b-c} এবং উহাকে $x^{\frac{b-c}{bc}}$ এইভাবে লেখা যায়]

উদা. 13. সরল কর : $\left\{\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^4}}\times\sqrt{\frac{y^3}{x^5}}\right\}^{12}\times x^{22}$. [M. U. 1894]

প্রদত্ত রাশি $=\left\{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}}\times\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}\right\}^{12}\times x^{22}=\frac{x^{\frac{2}{3}\times12}.y^{\frac{3}{2}\times12}}{y^{\frac{4}{3}\times12}.x^{\frac{5}{2}\times12}}\times x^{22}$

$=\frac{x^8y^{18}\times x^{22}}{y^{16}x^{30}}=\frac{x^{30}y^{18}}{y^{16}x^{30}}=y^{18-16}=y^2.$

উদা. 14. সরল কর : $\left\{\dfrac{4^{m+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2.2^m}}{2\sqrt{2^{-m}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$. [C. U. '47]

প্রদত্ত রাশি $=\left\{\dfrac{(2^2)^{m+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2^{m+1}}}{2.2^{-\frac{m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}} = \left\{\dfrac{2^{2m+\frac{1}{2}}.2^{\frac{m+1}{2}}}{2^{1-\frac{m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$

$= \left\{\dfrac{2^{2m+\frac{1}{2}+\frac{m+1}{2}}}{2^{\frac{2-m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}} = \left\{2^{2m+\frac{1}{2}+\frac{m+1}{2}-\frac{2-m}{2}}\right\}^{\frac{1}{m}}$

$=\left\{2^{\frac{4m+1+m+1-2+m}{2}}\right\}^{\frac{1}{m}} = \left\{2^{3m}\right\}^{\frac{1}{m}} = 2^3 = 8.$

উদা. 15. সরল কর : $\dfrac{2^{m+1}.3^{2m-n}.5^{m+n}.6^n}{15^m.10^{n+2}.6^m}$. [P. U. 1918]

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{2^{m+1}.3^{2m-n}.5^{m+n}.2^n.3^n}{3^m.5^m.2^{n+2}.5^{n+2}.2^m.3^m} = \dfrac{2^{m+n+1}.3^{2m}.5^{m+n}}{3^{2m}.2^{m+n+2}.5^{m+n+2}}$

$=2^{m+n+1-m-n-2}.5^{m+n-m-n-2} = 2^{-1}.5^{-2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{50}$.

[দ্রষ্টব্য : $6^m = (2\times3)^m = 2^m.3^m$ এই ভাবে লেখা যায়।]

উদা. 16. সরল কর : $\sqrt[bc]{\dfrac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}}\sqrt[ca]{\dfrac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}}\sqrt[ab]{\dfrac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$ [C.U. 1938]

প্রদত্ত রাশি $=\sqrt[bc]{x^{\frac{b}{c}-\frac{c}{b}}}\ \sqrt[ca]{x^{\frac{c}{a}-\frac{a}{c}}}\ \sqrt[ab]{x^{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}}$

$=\sqrt[bc]{x^{\frac{b^2-c^2}{bc}}}\ \sqrt[ca]{x^{\frac{c^2-a^2}{ca}}}\ \sqrt[ab]{x^{\frac{a^2-b^2}{ab}}}$

$=x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}}.\ x^{\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}}.\ x^{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}} = x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}+\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}$

$=(x)^{\frac{a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2-a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2}{a^2b^2c^2}} = x^{\frac{0}{a^2b^2c^2}} = x^0 = 1.$

[দ্রষ্টব্য : $\sqrt[bc]{x^{\frac{b^2-c^2}{bc}}} = \left(x^{\frac{b^2-c^2}{bc}}\right)^{\frac{1}{bc}} = x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}}$]

উদা. 17. সরল কর : $\frac{a^2}{(1-a)^n}+\frac{2}{(1-a)^{n-1}}-\frac{1}{(1-a)^{n-2}}$.

[এখানে হরে $(1-a)$এর বিভিন্ন ঘাত আছে, তন্মধ্যে n বৃহত্তম ঘাত-সূচক, সুতরাং হরগুলির ল. সা. গু. $(1-a)^n$ হইবে।]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{a^2+2(1-a)-(1-a)^2}{(1-a)^n}=\frac{a^2+2-2a-1+2a-a^2}{(1-a)^n}$$

$$=\frac{1}{(1-a)^n}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** ভাগে ঘাত সূচকগুলির বিয়োগ হয়, $\therefore$ $(1-a)^n$কে $(1-a)^{n-1}$ দ্বারা ভাগ করিলে $(1-a)^{n-n+1}=(1-a)^1=1-a$ হয়।]

উদা. 18. সরল কর :—

$$\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}}+\frac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}.$$

[C. U. '26, '40 ; D. B. '29 ; E. B. S. B. '52]

প্রথম পদের লব ও হরকে x^a দ্বারা, দ্বিতীয় পদের লব ও হরকে x^b দ্বারা এবং তৃতীয় পদের লব ও হরকে x^c দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$\frac{x^a}{x^a+x^b+x^c}+\frac{x^b}{x^b+x^a+x^c}+\frac{x^c}{x^c+x^a+x^b}=\frac{x^a+x^b+x^c}{x^a+x^b+x^c}=1.$$

দ্রষ্টব্য : এইরূপ অঙ্কে সব হরগুলি সমান করিবার জন্য কোন্‌টিকে কি দিয়া গুণ করিতে হইবে তাহা স্থির করিয়া লইবে।]

সূচক সম্বন্ধীয় অভেদাবলী

উদাহরণমালা 8

উদা. 1. $x^y=y^x$ হইলে $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$ হইবে ; আরও $x=2y$ হইলে $y=2$ হইবে। [C. U. '28, '49 ; A. U. '19 ; D. B. '50]

$\because$ $x^y=y^x$, $\therefore$ $x^{\frac{y}{y}}=y^{\frac{x}{y}}$, বা $x=y^{\frac{x}{y}}$.

এক্ষণে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=\frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}}=\frac{x^{\frac{x}{y}}}{x}=x^{\frac{x}{y}-1}$

আবার, $\because$ $x=2y$, এবং $x^y=y^x$ (প্রদত্ত শর্ত)

$\therefore$ $x^y=y^x$, বা, $(2y)^y=y^{2y}$, বা $(2y)^y=(y^2)^y$,

$\therefore$ $y^2=2y$, $\therefore$ $y=2$.

[দ্রষ্টব্য : যদি $a^x=b^x$ হয়, তবে $a=b$, এবং যদি $a^x=a^y$ হয়, তবে $x=y$ হইবে। অর্থাৎ দুইটি সমান সংখ্যা বা রাশির ঘাত (শূন্য ভিন্ন) একই থাকিলে যাহাদের ঘাত তাহারা সমান হইবে। আবার যদি উহাদের রাশিদ্বয় (1 ভিন্ন) একই থাকে, তবে ঘাত দুইটি সমান হইবে। এখানে দেখ $(2y)^y$ এবং $(y^2)^y$ সমান বলিয়া এবং উভয়েরই ঘাত y বলিয়া যাহাদের ঘাত তাহারা অর্থাৎ $2y$ এবং y^2 সমান বুঝিতে হইবে।]

উদা. 2. যদি $m=a^x$, $n=a^y$ এবং $a^2=(m^y n^x)^z$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $xyz=1$. [H. S. '63 ; B. U. 1890]

এখানে $a^2=(m^y n^x)^z=m^{yz}n^{xz}=(a^x)^{yz}.(a^y)^{xz}$

[m ও nএর মান বসাইয়া]

$$=a^{xyz}\,a^{xyz}=a^{2xyz},\quad \therefore\ a^2=a^{2xyz},$$

$$\therefore\ 2xyz=2,\quad \therefore\ xyz=1.$$

উদা. 3. $x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}$ এবং $xyz=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে $a+b+c=0$.

$$x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}=k \text{ (মনে কর)}$$

$\therefore\ \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^a=k^a$, বা, $x=k^a$. অনুরূপে $y=k^b$ এবং $z=k^c$.

আবার, $\because\ xyz=1$, $\therefore\ k^a.k^b.k^c=1$ বা, $k^{a+b+c}=1=k^0$.

$$\therefore\ a+b+c=0.$$

উদা. 4. $a=x^{q+r}y^p$, $b=x^{r+p}y^q$, $c=x^{p+q}y^r$ হইলে প্রমাণ কর যে, $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$. [C. U. '15]

$$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=(x^{q+r}y^p)^{q-r}.(x^{r+p}y^q)^{r-p}.(x^{p+q}y^r)^{p-q}$$

$$=x^{q^2-r^2}.y^{pq-pr}.x^{r^2-p^2}.y^{qr-pq}.x^{p^2-q^2}.y^{rp-rq}$$

$$=x^{q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2}.y^{pq-pr+qr-pq+pr-qr}$$

$$=x^0\times y^0=1\times1=1.$$

উদা. 5. $x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে $x^3-6x^2+6x-2=0$.
[C. U. '30, '36, '42, '50 ; D. B. '42]

$\because\ x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$, $\therefore\ x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$, $\therefore\ (x-2)^3=\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $x^3-6x^2+12x-8=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3+3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)$

$=2^2+2+3.2.(x-2)$ [$\because\ x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$]

বা, $x^3-6x^2+12x-8=6+6x-12,$

বা, $x^3-6x^2+12x-8-6-6x+12=0,$

$\therefore\ x^3-6x^2+6x-2=0.$

উদা. 6. যদি $a^{m^n}=(a^m)^n$ হয়, তবে mএর মান n দ্বারা প্রকাশ কর। [Pat. U. '18]

$\because\ a^{m^n}=(a^m)^n,\quad \therefore\ a^{m^n}=a^{mn},\quad \therefore\ m^n=mn,$

$\therefore\ \frac{m^n}{m}=n,$ বা, $m^{n-1}=n,\quad \therefore\ m=n^{\frac{1}{n-1}}.$

উদা. 7. যদি $p^x=q^y=r^z$ এবং $q^2=pr$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}.$

[এখানে প্রথমে p ও r-কে q দ্বারা প্রকাশ কর]

$\because\ p^x=q^y,\quad \therefore\ p=q^{\frac{y}{x}},$ এবং $\because\ r^z=q^y,\quad \therefore\ r=q^{\frac{y}{z}}.$

আবার, $\because\ q^2=pr,\quad \therefore\ q^2=q^{\frac{y}{x}}.q^{\frac{y}{z}}=q^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$

$\therefore\ \frac{y}{x}+\frac{y}{z}=2,\quad \therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ [y দ্বারা ভাগ করিয়া].

[সূচকীয় সমীকরণ দ্বিঘাত সমীকরণ অধ্যায়ে দেখ।]

Exercise 6

মান নির্ণয় কর :—

1. $64^{\frac{2}{3}}$ 2. $9^{-\frac{3}{2}}$ 3. $(\frac{1}{81})^{-\frac{5}{4}}$ 4. $\sqrt[5]{32^4}$ [P. U.]

5. $243^{-\frac{2}{5}}$ 6. $\sqrt[4]{625^3}$

সরল কর :—

7. $x^{-\frac{2}{3}}\div x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{4}}$ 8. $\{(x^{-3})^{\frac{2}{3}}\}^{-\frac{1}{2}}.$

9. $8a^{-\frac{3}{4}}\div 6b^{-\frac{2}{3}}\times\frac{1}{2}ab.$ 10. $x^{\frac{1}{3}}.x^{-\frac{1}{4}}.x^{\frac{1}{2}}\div x^{\frac{7}{12}}.$

11. $(a^2b^2)^{-\frac{1}{6}}\times(a^2)^{\frac{1}{3}}\div(b^3)^{\frac{1}{9}}$ 12. $\dfrac{\frac{1}{4^{-3}}-\frac{2}{10^{-2}}}{\frac{1}{2^{-2}}+\frac{1}{4^{-1}}}.$

13. $\sqrt[4]{a^2b^3c^4}\div\sqrt[3]{a^4b^6}\times\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}\right)^{-4}$ 14. $\sqrt{a^{-5}b^6}\times\sqrt[4]{a^2.b^{-8}}.$

15. $\sqrt[3x]{a^4} \div \sqrt[5x]{a^{-4}}$. 16. $\sqrt[4]{a^2.\sqrt[3]{a^{-2}}}$. 17. $\left(\frac{x^{-3}y^4}{x^2y^{-1}}\right)^{\frac{3}{5}} \div \left(\frac{x^2y^3}{x^{-3}y^4}\right)^2$.

17. (a) $\left\{\sqrt[3]{4} \times \frac{1}{\sqrt[6]{8}} \times \sqrt[12]{2^{-1}}\right\}^{\frac{1}{4}}$ [Pat. '23]

18. $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+1$কে $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}-1$ দিয়া [C. U. '33]

এবং $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$কে $x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}$ দিয়া গুণ কর। [Pat '29]

19. $(x^n-y^{-n})(x^n+y^{-n})$এর গুণফল কত?

20. $a^{-m}+b^n$কে $a^{-2m}-a^{-m}b^n+b^{2n}$ দিয়া গুণ কর।

21. $x^{3^n}-y^{3^n}$ কে $x^{3^{n-1}}-y^{3^{n-1}}$ দিয়া ভাগ কর।

22. a ও bকে বর্গ বা ঘন রাশি ধরিয়া $a-b$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

23. $x^{2m}-y^{2n}$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সরল কর :—

24. $\frac{x^{a+b}.x^{a-b}.x^{c-2a}}{x^{c-a}}$. [C. U. 1870]

25. $(a+b)^m \times (a-b)^m \times (a^2+b^2)^m$. [M. U. 1889]

26 $\left(a^{n^2-1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \times \frac{\sqrt{a^{2n}}}{a}$. 27. $\{(x^{a+b-c} \times x^{a-b+c})^{\frac{b}{2}}\}^c$. [M.U.]

28. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \div \left(\frac{x^a}{x^{a-b}}\right)^{\frac{a^2}{b}}$ [M. U. 1890] 29. $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q} \div \left(\frac{x^{p+q}}{x^{p-q}}\right)^{\frac{p^2}{q}}$ [C. U. 1902]

29. (a). $\frac{2^a(2^{a-1})^a}{2^{a+1}2^{a-1}}\left\{\frac{8^{\frac{a}{3}}}{4}\right\}^{-a}$ [E. B. S. B. '51]

30. $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l} \times \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m} \times \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m-n}$ [Pat. '28]

31. $\left\{\frac{(9^{n+\frac{1}{4}}\sqrt{3.3^n})}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$ [C. U. '25]

31. (a). $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2}\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2}\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$. [C.U.]

32. $\left(\frac{x^{m^2+n^2}}{x^{-mn}}\right)^{m-n} \times \left(\frac{x^{n^2+l^2}}{x^{-nl}}\right)^{n-l} \times \left(\frac{x^{l^2+m^2}}{x^{-lm}}\right)^{l-m}$

33. $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \times \left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \times \left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$ 34. $\dfrac{(p+\frac{1}{q})^m(p-\frac{1}{q})^n}{(q+\frac{1}{p})^m(q-\frac{1}{p})^n}$

35. $\sqrt[a-c]{x^{\frac{1}{a-b}}} \times \sqrt[b-a]{x^{\frac{1}{b-c}}} \times \sqrt[c-b]{x^{\frac{1}{c-a}}}$.

36. $\dfrac{2^{m+2}.\,3^{2m-n}.\,5^{m+n+2}.\,6^n}{6^m.\,10^{n+2}.\,15^m}$. [G. U. '51]

37. $\dfrac{2^n.6^{m+1}.10^{m-n}.15^{m+n-2}}{4^m.3^{2m+n}.25^{m-1}}$. [P.U. '20] 38. $\dfrac{e^{2x}+e^{-x}-e^x-1}{e^{2x}-e^{-x}+e^x-1}$.

38. (*a*). $\dfrac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}$. [B. U. 1891]

39. $\dfrac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-p}}+\dfrac{1}{1+x^{n-p}+x^{n-m}}+\dfrac{1}{1+x^{p-m}+x^{p-n}}$.

[C. U. '37, '42 ; G. U. '49 ; E. B. S. B '51]

40. $(1+x^{a-b}+x^{a-c})^{-1}+(1+x^{b-c}+x^{b-a})^{-1}$
$+(1+x^{c-a}+x^{c-b})^{-1}$.

41. $\dfrac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{r}}(a^q)^{\frac{1}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[q]{b^n}(\sqrt[m]{b})^r\right\}^{mq}} \div \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^q\right\}^r$. [D. B. '23, '50]

42. $\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x+1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$. 42. (*a*). $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$. [C.U. '34]

42. (*b*). $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}} \times \left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}} \times \left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}}$. [W. B. S. F. '53]

43. $\dfrac{1}{(4x^3-3x)^2}=\left\{\dfrac{\dfrac{3\sqrt{1-x^2}}{x}-\dfrac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}}{1-3\left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right)}\right\}^2$. [C. U.]

44. যদি $m^n=n^m$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}=m^{\frac{m}{n}-1}$.

45. $x^2=y^3$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{3}}$

46. যদি $a^x=z^y$ এবং $a^z=z^x$ হয়, তবে $x^2=yz$ হইবে।

47. $\left(_xn^2\right)^n=\left(_x2^n\right)^2$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt[n+1]{n^3}=2$.

48. যদি $p=a^x$, $q=a^y$ ও $(p^yq^x)^z=a^2$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz=1$.

48. (*a*). যদি $a^x=b$, $b^y=c$, $c^z=a$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $xyz=1$.

49. $a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}$ এবং $abc=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x+y+z=0$.

50. $x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $2x^3-6x=5$.

50. (*a*). $x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $3x^3+9x=8$. [P.U. '3]

51. $x=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3-3x^2-6x-4=0$.

52. যদি $y=x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$ হয়, তবে $y^3+3y=x-\frac{1}{x}$ হইবে।

53. $x^a=y^b=z^c$ এবং $y^2=xz$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$.

54. $x^{p^q}=\left(x^{\sqrt{p}}\right)^q$ হইলে, q-এর দ্বারা p-এর মান নির্ণয় কর।

55. $a=xy^{p-1}$, $b=xy^{q-1}$, $c=xy^{r-1}$ হইলে, $a^{q-r}.\ b^{r-p}.\ c^{p-q}=1$ হইবে।

করণী (Surds)

মূলদ রাশি। যে রাশিকে তুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় তাহাকে **মূলদ** (Rational) রাশি বলে। যথা, 2, $\frac{2}{5}$, $\sqrt{9}$.

করণী। যদি কোন রাশির কোন মূল সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা না যায়, তবে সেই মূলকে **করণী** বা **অমূলদ রাশি** (Surd or Irrational quantity) বলে। যথা—(1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ ইহারা করণী বা অমূলদ রাশি। (2) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{x}$ এই বীজগণিতীয় রাশিগুলির মান ঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় না, সুতরাং ইহাদিগকেও করণী বলে। হয়ত, a ও xএর মান এরূপ হইতে পারে যে, $\sqrt{a}$ ও $\sqrt[3]{x}$ প্রকৃতপক্ষে করণী নহে, তথাপি $\sqrt{a}$ ও $\sqrt[3]{x}$কে করণী বলা হয়।

করণীর ক্রম (Order)। করণীর মূল-সূচক সংখ্যা দ্বারা ইহার ক্রম, প্রকাশিত হয়। যথা, $\sqrt{3}$ ও $2^{\frac{1}{2}}$ **দ্বিতীয় ক্রমের** (second order) করণী বা **দ্বিঘাত** (quadratic) করণী। ঐরূপ $\sqrt[3]{4}$ ও $5^{\frac{2}{3}}$ তৃতীয় (third) ক্রমের বা **ত্রিঘাত** (cubic) করণী। $\sqrt[n]{a}$ একটি n-তম ক্রমের করণী, ইত্যাদি।

সমমূলীয় করণী। কতকগুলি করণী একই ক্রমের হইলে তাহাদিগকে সমমূলীয় (equiradical) করণী বলা হয়।

$\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ প্রভৃতি চিহ্নগুলিকে করণী চিহ্ন (radical sign) বলে।

20. বিভিন্ন ক্রমের করণীকে সমমূলীয় করণীতে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1. $\sqrt[3]{x^2}$ ও $\sqrt[4]{x^3}$কে সমমূলীয় করণীতে পরিণত কর।

এখানে মূলজ্ঞাপক সংখ্যাগুলি 3 ও 4. উহাদের ল. সা. গু.$=12$.

$\therefore\ \sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2\times4}{3\times4}}=x^{\frac{8}{12}}=\sqrt[12]{x^8}$

এবং $\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{3\times3}{4\times3}}=x^{\frac{9}{12}}=\sqrt[12]{x^9}$.

$\therefore$ নির্ণেয় করণীগুলি হইল $\sqrt[12]{x^8}$ ও $\sqrt[12]{x^9}$.

কোন **মূলদ রাশিকে** যে-কোন ক্রমের করণীতে প্রকাশ করা যায়।

যথা, $x=\sqrt{x^2}=\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[4]{x^4}=\sqrt[n]{x^n}=\cdots$

করণীর তুলনা। বিভিন্ন ক্রমের করণীর মধ্যে পরস্পর তুলনা করিয়া মানের ক্রম নির্ণয় করিতে হইলে করণীগুলিকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিতে হয়।

উদাহরণ। $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ এবং $\sqrt[4]{8}$কে মানের ক্রম অনুসারে লিখ।

এখানে মূলজ্ঞাপক সংখ্যাগুলির অর্থাৎ 3, 2, 4এর ল. সা. গু.$=12$.

এক্ষণে, $\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{12}}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{6}{12}}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}$

$\sqrt[4]{8}=8^{\frac{1}{4}}=8^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{8^3}=\sqrt[12]{512}$

$\therefore$ মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে হইবে $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$.

1. করণীর সরলতম আকার : কোন কোন করণীকে একটি মূলদ রাশি ও একটি করণীর গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়। এইরূপ পরিবর্তিত আকারকে করণীটির সরলতম আকার (simplest form) বলে।

আবার, কোন মূলদ রাশি ও একটি করণীর গুণফলকে একটি পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1. $\sqrt{128}$ ও $\sqrt[3]{192}$কে সরলতম আকারে পরিণত কর।

$\sqrt{128}=\sqrt{64\times2}=\sqrt{8^2\times2}=(8^2\times2)^{\frac{1}{2}}=(8^2)^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}=8\times2^{\frac{1}{2}}=8\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{64\times3}=\sqrt[3]{4^3\times3}=4\sqrt[3]{3}$.

উদা. 2. $3\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt[3]{3}$কে পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ কর।

$$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=9^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}=(18)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{18}\ ;$$

$$2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8\times3}=\sqrt[3]{24}.$$

22. **সদৃশ ও অসদৃশ করণী**। যে সকল করণীর একই অমূলদ উৎপাদক থাকে, অথবা যে-করণীগুলিকে একই অমূলদ উৎপাদকবিশিষ্ট রূপে প্রকাশ করা যায়, তাহাদিগকে সদৃশ (similar or like) করণী বলে।

যে-করণীগুলি এরূপ নহে, তাহাদিগকে অসদৃশ (dissimilar বা unlike) করণী বলে। যথা—

(1) $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ ইহারা সদৃশ করণী ; কারণ, এখানে প্রত্যেকটির অমূলদ উৎপাদক $\sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{27}$ ইহারাও সদৃশ করণী ; কারণ, $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{27}=\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}$.

(3) $\sqrt{20}$ ও $\sqrt{75}$ ইহারা অসদৃশ করণী ; কারণ, $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ এবং $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$.

23. **করণীর যোগ ও বিয়োগ**। কতকগুলি করণীর যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে সেইগুলিকে সরলতম আকারে পরিণত করিবে। যদি ঐগুলি **সদৃশ করণী** হয়, তবে উহাদের মূলদ উৎপাদকগুলির যোগফলের সহিত ঐ অমূলদ উৎপাদকটি গুণ করিলেই, নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়। আর যদি ঐ করণীগুলি **অসদৃশ** হয়, তবে উহাদের যোগফল একটি রাশি হইবে না, ঐগুলি + চিহ্ন দিয়া লিখিবে মাত্র। বিয়োগের নিয়মও এই।

উদা. 1. $4\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ ও $6\sqrt{2}$এর সমষ্টি কত ?

নির্ণেয় সমষ্টি $=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6\sqrt{2}=(4+3+6)\sqrt{2}=13\sqrt{2}$.

উদা. 2. $\sqrt{12}-4\sqrt{3}$ ও $6\sqrt{3}$ ইহাদের সমষ্টি কত ?

নির্ণেয় সমষ্টি $=\sqrt{12}-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}$

$=(2-4+6)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

উদা. 3. $8\sqrt{2}$ ও $\sqrt{32}$এর অন্তর কত ?

$$8\sqrt{2}-\sqrt{32}=8\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(8-4)\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$$

উদা. 4 $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ এবং $4\sqrt{3}$এর যোগফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় যোগফল $=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

উদা. 5. $3\sqrt{48}-4\sqrt{75}+5\sqrt{192}$কে সরলতম আকারে প্রকাশ কর। [C. U. '47]

প্রদত্ত রাশি $=3\sqrt{16\times3}-4\sqrt{25\times3}+5\sqrt{64\times3}$
$=3\times4\sqrt{3}-4\times5\sqrt{3}+5\times8\sqrt{3}$
$=12\sqrt{3}-20\sqrt{3}+40\sqrt{3}=52\sqrt{3}-20\sqrt{3}=32\sqrt{3}.$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{175}-\sqrt{112}=\sqrt{7}.$ [C. U. '23]

$\sqrt{175}-\sqrt{112}=\sqrt{25\times7}-\sqrt{16\times7}=5\sqrt{7}-4\sqrt{7}=\sqrt{7}.$

Exercise 7

1. $\sqrt[3]{3}$ ও $\sqrt[4]{5}$ সমমূলীয় করণীতে প্রকাশ কর।

2. 2, $1\frac{1}{2}$ এবং x^2কে (i) দ্বিতীয় ক্রমের এবং (ii) তৃতীয় ক্রমের করণীতে প্রকাশ কর।

3. $\sqrt[3]{5}$ ও $\sqrt[4]{8}$এর মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তর ?

4. মানের ক্রম অনুসারে লিখ :—
(i) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{12}$; (ii) 3, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{10}$, (iii) $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{25}$, $\sqrt[3]{8}$,

5. পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ কর : $2\sqrt{5}$, $3\sqrt[3]{2}$, $x\sqrt[4]{y}$.

6. সরলতম আকারে পরিণত কর :—(i) $\sqrt{175}$ (ii) $2\sqrt{112}$
(iii) $5\sqrt{192}$ (iv) $\sqrt[3]{375}$ (v) $4\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{81}$.

7. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{3}$.

8. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{98}+\sqrt{8}-2\sqrt{32}=\sqrt{2}$.

করণীর গুণন

24. (1) করণীগুলি **সমমূলীয়** হইলে, উহাদের মূলদ ও অমূলদ উৎপাদকগুলির পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিতে হয়।

(2) করণীগুলি **বিভিন্ন ক্রমের** হইলে উহাদিগকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিয়া পূর্বের ন্যায় গুণ করিতে হয়।

উদা. 1. (a) $3\sqrt{2}\times4\sqrt{5}=12\sqrt{10}$ (b) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{9}=3.$

উদা. 2. $2\sqrt{5}\times\sqrt{32}\times3\sqrt{2}=2\sqrt{5}\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$
$=2\times4\times3\sqrt{5\times2\times2}=24\sqrt{5\times2\times2}=24.2\sqrt{5}=48\sqrt{5}.$

উদা. 3. $3\sqrt[3]{3}\times2\sqrt[4]{2}=3\sqrt[12]{3^4}\times2\sqrt[12]{2^3}=6\sqrt[12]{3^4\times2^3}=6\sqrt[12]{648}.$

(3) **মিশ্র করণীসমূহের গুণন**। এইরূপ গুণনে বীজগণিতের মিশ্র রাশির গুণনের নিয়ম অনুসরণ করিতে হয়।

উদা. 1. $2\sqrt{3}+3\sqrt{4}$কে $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2\sqrt{3}+3\sqrt{4})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})=(2\sqrt{3}\times3\sqrt{2})+(3\sqrt{4}\times3\sqrt{2})+(2\sqrt{3}\times\sqrt{3})+(3\sqrt{4}\times\sqrt{3})$$

$$=6\sqrt{6}+9\sqrt{8}+6+3\sqrt{12}=6\sqrt{6}+18\sqrt{2}+6+6\sqrt{3}.$$

উদা 2. $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$কে $2\sqrt{6}-4\sqrt{3}$ দিয়া গুণ কর।

$$\text{গুণফল}=(3\sqrt{2}\times2\sqrt{6})+(2\sqrt{5}\times2\sqrt{6})-(3\sqrt{2}\times4\sqrt{3})-(2\sqrt{5}\times4\sqrt{3})$$

$$=6\sqrt{12}+4\sqrt{30}-12\sqrt{6}-8\sqrt{15}$$

$$=12\sqrt{3}+4\sqrt{30}-12\sqrt{6}-8\sqrt{15}.$$

[দ্রষ্টব্য : $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ হয়, $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ হয়। সাধারণভাবে গুণ করিয়া গুণফলের করণীগুলির সরলতম আকারে পরিণত করিতে হয়।]

25. **করণী-নিরসন** (Rationalisation)। (1) কোন করণীকে অন্য কোন লঘিষ্ঠ বা উপযুক্ত করণী দ্বারা গুণ করিয়া মূলদ রাশিতে পরিণত করাকে করণী-নিরসন বলে। ঐ গুণক করণীকে **করণী-নিরসক** উৎপাদক বলে।

উদা. 1. $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$ এবং $5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{2}}=5$, সুতরাং $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ হয়।

$\therefore$ $\sqrt{5}$কে $\sqrt{5}$ দ্বারা বা $5^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা গুণ করিলে করণী-নিরসন হয় এবং উহা মূলদ রাশিতে পরিণত হয়। এখানে $\sqrt{5}$ হইল করণী-নিরসক উৎপাদক।

উদা. 2. $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$; কিন্তু $2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}=2$, অর্থাৎ $2^{\frac{2}{3}}$কে $2^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা গুণ করিলে মূলদ সংখ্যা হয়। $\therefore$ $\sqrt[3]{4}$কে $\sqrt[3]{2}$ দ্বারা গুণ করিলে করণী-নিরসন হয়। এখানে $\sqrt[3]{2}$ হইল করণী-নিরসক উৎপাদক।

(2) অমূলদ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের হরকে মূলদ রাশিতে পরিণত করিয়া হরের করণী-নিরসন করা হয়। এইরূপ করিতে হইলে হরকে যে করণী-নিরসক উৎপাদক দ্বারা গুণ করিবে, লবকেও তাহা দ্বারা গুণ করিতে হয়। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদা. 1. $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}.$

উদা. 2. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}=\dfrac{2\times\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}}=\dfrac{2\sqrt[3]{9}}{3}.$

উদা. 3. $\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\dfrac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}$

$$=\frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=\frac{27+8-12\sqrt{6}}{27-8}=\frac{35-12\sqrt{6}}{19}.$$

উদা. 4. $\dfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}$

$$=\frac{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})^2}{(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})}$$

$$=\frac{a+1+a-1+2\sqrt{a^2-1}}{(a+1)-(a-1)}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-1}}{2}=\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{1}.$$

26. **করণীর ভাগ।** করণীকে অন্য একটি করণী বা মিশ্র করণী দ্বারা ভাগ করিতে হইলে ভাগটিকে ভগ্নাংশের আকারে লিখিয়া হরটিকে পূর্বের ন্যায় মূলদ রাশিতে পরিণত করিতে হয়।

উদাহরণমালা 9

উদা. 1. $8\sqrt{3}$কে $3\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$8\sqrt{3}\div 3\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{6}}{3\times 2}=\frac{4}{3}\sqrt{6}.$$

উদা. 2. $6\sqrt[3]{3}\div 2\sqrt[3]{2}=$ কত?

$$\frac{6\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}}=\frac{3\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3\sqrt[3]{12}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{12}.$$

উদা. 3. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$এর 2 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান কত?

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+1+2\sqrt{2}}{2-1}=3+2\sqrt{2}$$

$=3+2\times 1{\cdot}414=3+2{\cdot}828=5{\cdot}828=5{\cdot}83$ (আসন্ন)।

উদা. 4. দেখাও যে, $\dfrac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}=a+x+\sqrt{ax+x^2}.$ [B. U.]

$$\frac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}=\frac{a\sqrt{a+x}(\sqrt{a+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{a(a+x)+a\sqrt{ax+x^2}}{a+x-x}=\frac{a(a+x+\sqrt{ax+x^2})}{a}$$

$$=a+x+\sqrt{ax+x^2}.$$

উদা. 5. $x=3+2\sqrt{2}$ হইলে, $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ এর মান নির্ণয় কর। [P.U. '28]

$\because\ x=3+2\sqrt{2}=2+1+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2, \quad \therefore\ \sqrt{x}=\sqrt{2}+1,$

এক্ষণে, $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1-\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$

$=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2.$

উদা. 6. সরল কর : $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$. [B. U.]

প্রদত্ত রাশি $=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}=\frac{4x\sqrt{x^2-1}}{x^2-(\sqrt{x^2-1})^2}$

$=\frac{4x\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}=\frac{4x\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1}=4x\sqrt{x^2-1}.$

উদা. 7. $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হইলে, $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$এর মান কত হইবে ?

এখানে $x+y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{8}{2}=4,$

এবং $xy=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1.$

$\therefore\ \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{(x+y)^2-xy}{(x+y)^2-3xy}=\frac{4^2-1}{4^2-3}=\frac{15}{13}.$

উদা. 8. $x=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $bx^2-ax+b=0.$

[D. B. '44]

প্রদত্ত শর্ত হইতে যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই,

$\frac{x+1}{x-1}=\frac{2\sqrt{a+2b}}{2\sqrt{a-2b}},\ \therefore\ \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{a+2b}{a-2b}$ [বর্গ করিয়া]

বা, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{a+2b}{a-2b},$

$\therefore\ \frac{2(x^2+1)}{4x}=\frac{2a}{4b}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\frac{x^2+1}{x}=\frac{a}{b},$ বা, $bx^2+b=ax,$ $\therefore\ bx^2-ax+b=0.$

Exercise 8

1. গুণফল নির্ণয় কর :—

(i) $\sqrt{7}\times\sqrt{7}$ (ii) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{4}$ (iii) $4\sqrt[3]{4}\times2\sqrt[3]{2}$

(iv) $2\sqrt[3]{3}\times3\sqrt{6}$ (v) $4\sqrt{3}\times5\sqrt{6}$

2. ভাগ কর : (i) $6\sqrt{5} \div 2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt[3]{4} \div 2\sqrt[3]{2}$ (iii) $3\sqrt[4]{5} \div 6\sqrt[4]{4}$.

3. $\sqrt{2}=1{\cdot}414$, $\sqrt{3}=1{\cdot}732$ এবং $\sqrt{5}=2{\cdot}236$ হইলে নিম্নের ভগ্নাংশগুলির দশমিক 2 অঙ্ক পর্যন্ত মান কত হইবে ?

(i) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (iii) $\dfrac{15}{\sqrt{5}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (v) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{3-2\sqrt{2}}$.

4. গুণ কর (প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা) :—

(i) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(iii) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$ (iv) $3\sqrt{5}-2\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$

(v) $\sqrt{x}+\sqrt{y-x}$ ও $\sqrt{x}-\sqrt{y-x}$

(vi) $\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}$ ও $\sqrt{a-b}$

(vii) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$ এবং $\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{5}$

(viii) $x+\sqrt{y}$ এবং $\sqrt{x}-y$.

5. বর্গ নির্ণয় কর :—

(i) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (ii) $2-\sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

(iv) $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$ (v) $a-\sqrt{b^2-a^2}$ (vi) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-5}$.

6. হরগুলির করণী-নিরসন কর :—

(a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (b) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$ (c) $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}-1}$ (d) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

7. $3+\sqrt{6}$কে $\sqrt{3}+\sqrt{3}$ দিয়া ভাগ কর।

8. (i) $\dfrac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$ ও (ii) $\dfrac{8+3\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}+\dfrac{8-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সরল কর :—

9. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ 10. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

11. $\dfrac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}-\sqrt{a+x}}-\dfrac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}+\sqrt{a+x}}$ [M. U.]

12. যদি $a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$, $b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ হয়, তবে $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$এর মান কত ?

12. (a) $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $xy=1$ হইলে, x^2+xy+y^2এর মান কত ?

13. $x=4+2\sqrt{3}$ হইলে, $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$এর মান কত হইবে ?

14. যদি $x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}$ হয়,
তবে প্রমাণ কর যে, $b^2x^2-2a^2x+b^2=0$.

15. প্রমাণ কর যে $\sqrt{a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-2x\sqrt{a^2-x^2}}=2x$.

16. $a=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ হইলে, $a^6+a^4+a^2+1$এর মান কত ?

[সঙ্কেত : $a^2=\frac{1-1+2\sqrt{-1}}{2}=\sqrt{-1}$, $\therefore$ $a^4=-1$]

17. $x=(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}$ হইলে,
$x^3+3bx-2a$এর মান কত ?

18. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে $(x+y+z)^3=27xyz$.

19. যদি $x=a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে $a(bx^3-3bx-a)=b^2$.

20. সরল কর : $\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}-\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$. [D. B '28]

21. $x=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ হইলে, $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ এর মান কত ? [C. U.]

22. xএর মান $\frac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে, $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ এর মান কত ? [B. U.]

23. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}}+\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}}=\sqrt{2x}$.
[C. U. '27]

মূলাকর্ষণ (Evolution)

আমরা পূর্বে কোন রাশিকে কোন নির্দিষ্ট ঘাত বা শক্তিতে উন্নীত করিবার প্রক্রিয়া (involution) সম্বন্ধে আলোচনা করিয়াছি। এখানে আমরা উহার বিপরীত প্রক্রিয়া মূলাকর্ষণ সম্বন্ধে আলোচনা করিতেছি।

27. মূল। একটি প্রদত্ত রাশির কোন মূল বলিতে এমন একটি রাশিকে বুঝায় যাহাকে ঐ মূলের সূচক-নির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত করিলে ঐ প্রদত্ত রাশিটি পাওয়া যায়। যথা, $\sqrt[3]{8}=2$ (এখানে দেখ, 2কে ত্রিঘাতে উন্নীত করিলে 8 হয়, $\therefore$ 8-এর ঘনমূল 2)। আবার, $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$ [এখানে দেখ $a+b$কে দ্বিঘাতে উন্নীত করিলে $a^2+2ab+b^2$ হয়, $\therefore$ $a^2+2ab+b^2$এর বর্গমূল $a+b$ হইল।]

মূল সূচক চিহ্নকে ($\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, ইত্যাদি) radical sign বলে।

28. **মূলাকর্ষণ।** কোন রাশির কোন নির্দিষ্ট মূল নির্ণয় করিবার প্রক্রিয়াকে **মূলাকর্ষণ প্রক্রিয়া** বলে। যথা, কোন সংখ্যা বা রাশির বর্গমূল বা ঘনমূল বা n-তম মূল প্রভৃতি নির্ণয়। যথা—

উদা. 1. $\sqrt{a^4}=\pm a^2$ [কারণ $(\pm a^2)^2=a^4$],

$\sqrt{a^5}=\pm a^{\frac{5}{2}}$ [কারণ $\left(\pm a^{\frac{5}{2}}\right)^2=a^5$]

$\sqrt{16a^6}=\pm 4a^3$.

দ্রষ্টব্য : উপরের দৃষ্টান্ত হইতে দেখা যাইতেছে যে (i) কোন ধনাত্মক রাশির বর্গমূল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুইটি হইবে। কারণ $(a^2)^2=a^4$ এবং $(-a^2)^2=a^4$, সুতরাং a^4-এর বর্গমূল $+a^2$ এবং $-a^2$ দুইই হইবে। সাধারণতঃ ধনাত্মক মূলটি লেখা হয়। তোমরা দুইটিই লিখিবে।

(ii) আবার দেখ, কোন পদের বর্গমূলের ঘাত সেই পদের যে ঘাত আছে তাহার অর্ধেক হইবে। যথা, a^5-এর বর্গমূল $a^{\frac{5}{2}}$.

(iii) পদের সাংখ্য-সহগের বর্গমূল পাটীগণিতের প্রণালীতে নির্ণয় করিয়া লইবে।

উদা. 2. $\sqrt[3]{x^6}=x^2$ [কারণ $(x^2)^3=x^6$]

$\sqrt[3]{-x^6}=-x^2$ [কারণ $(-x^2)^3=-x^6$]

$\sqrt[3]{27x^3y^6}=3xy^2$.

দ্রষ্টব্য : উপরের দৃষ্টান্ত হইতে দেখা গেল যে,

(i) কোন পদের ঘনমূলের ঘাত পদটির ঘাতের এক-তৃতীয়াংশ ($\frac{1}{3}$) হয়। যথা, x^6-এর ঘনমূল x^2, x^5-এর ঘনমূল $x^{\frac{5}{3}}$ ইত্যাদি।

(ii) ধনাত্মক পদের ঘনমূল কেবল ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক পদের ঘনমূল কেবল ঋণাত্মক হয়।

নিয়ম। বীজগণিতীয় কোন ঘাতবিশিষ্ট পদের যে মূল নির্ণয় করিতে হইবে, সেই মূলের ঘাত হইবে প্রদত্ত ঘাতের তত অংশ। যথা—

$$\sqrt[4]{a^{20}}=\pm a^{\frac{20}{4}}=\pm a^5,\quad \sqrt[5]{-x^{15}}=-x^{\frac{15}{5}}=-x^3.$$

অতএব, ক্রিয়াসূচক চিহ্নের নিয়ম (Rule of signs) অনুসারে জানা যায় যে,

(i) কোন ধনাত্মক রাশির কোন **যুগ্ম মূল** ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুইটি হইবে।

(ii) কোন রাশির কোন **অযুগ্ম মূল** একটি হয়, ধনাত্মক রাশির অযুগ্ম মূল ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক রাশির অযুগ্ম মূল ঋণাত্মক হইয়া থাকে।

(iii) কোন ঋণাত্মক রাশির কখনই কোন যুগ্ম মূল থাকিতে পারে না।

Square root (বর্গমূল)

29. বর্গমূল। কোন সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া যে গুণফল পাওয়া যায় তাহাকে ঐ সংখ্যাটির **বর্গ** (square) বলে। আর ঐ সংখ্যাটিকে গুণফলটির **বর্গমূল** (square root) বলে। যথা, $3\times3=9$, এখানে 9কে 3-এর বর্গ বলে, এবং 3-কে 9-এর বর্গমূল বলে। এইরূপ a^2-এর বর্গমূল a, x^6-এর বর্গমূল x^3. অতএব, কোন রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে এমন একটি রাশি বাহির করিতে হইবে যাহাকে ঐ রাশির দ্বারাই গুণ করিয়া প্রদত্ত রাশির সমান হয়।

দ্রষ্টব্য : বর্গমূল নির্ণয়ের সময় ঘাতের অর্ধেক বর্গমূলের ঘাত হয়। যথা, x^4এর বর্গমূল x^2, x^7 এর বর্গমূল $x^{\frac{7}{2}}$, x^{-5}এর বর্গমূল $x^{-\frac{5}{2}}$ ইত্যাদি।

30. বর্গমূল নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী।

নিয়ম। এই নিয়ম পাটীগণিতে সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের অনুরূপ। প্রদত্ত রাশিমালাটি যদি কোন অক্ষরের (a, x প্রভৃতির) ঘাতের উর্ধ্বক্রমে বা অধঃক্রমে সাজান না থাকে, তবে প্রথমে ঐরূপে সাজাইয়া লও। তারপর সাজান রাশিটির প্রথম পদের বর্গমূল স্থির করিয়া তাহাকে ভাগফলের মত রাশিটির ডানদিকে লিখ। উহাই হইল নির্ণেয় বর্গমূলের প্রথম পদ। ঐ প্রথম পদের বর্গকে রাশিমালার প্রথম পদের নীচে রাখিয়া রাশিমালা হইতে বিয়োগ কর। ঐ বর্গমূলের প্রথম পদটির দ্বিগুণকে বিয়োগফলের বামদিকে ভাজকের মত করিয়া বসাও। তারপর ঐ বিয়োগফলের প্রথম পদকে ঐ ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া যাহা হয় (মুখে মুখে স্থির করিয়া) তাহা বর্গমূলের দ্বিতীয় পদরূপে বসাও এবং বামদিকেও ভাজকের সঙ্গে বসাও (যোগ কর)। তারপর বামদিকের রাশিকে (ভাজককে) ঐ দ্বিতীয় পদ দ্বারা গুণ করিয়া পূর্বের বিয়োগফলটি হইতে বিয়োগ কর। এইবার বর্গমূলের পদ দুইটির দ্বিগুণ করিয়া পূর্বের ন্যায় কাজ করিয়া যাও। যতক্ষণ কোন অবশিষ্ট থাকিবে ততক্ষণ এইরূপ প্রক্রিয়া চলিবে। $\pm$ চিহ্নের পর বন্ধনীর মধ্যে প্রাপ্ত বর্গমূলটি লিখিবে।

উদাহরণমালা 10

উদা. 1. $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [C.U. '22]

$$\begin{array}{l|l|l}
 & x^4+4x^3+10x^2+12x+9 & x^2+2x+3 \\
 & x^4 & \\ \hline
2x^2+2x & 4x^3+10x^2+12x+9 & \\
 & 4x^3+4x^2 & \\ \hline
2x^2+4x+3 & 6x^2+12x+9 & \\
 & 6x^2+12x+9 & \\ \hline
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(x^2+2x+3)$.

উদা. 2. বর্গমূল নির্ণয় কর : $25x^{-2}-12x+16x^{-8}+4x^4-24x^{-5}$. [C. U. '12]

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^4-12x+25x^{-2}-24x^{-5}+16x^{-8} \;\big|\; 2x^2-3x^{-1}+4x^{-4} \\
 & 4x^4 \\
\hline
4x^2-3x^{-1} & -12x+25x^{-2}-24x^{-5}+16x^{-8} \\
 & -12x+9x^{-2} \\
\hline
4x^2-6x^{-1}+4x^{-4} & 16x^{-2}-24x^{-5}+16x^{-8} \\
 & 16x^{-2}-24x^{-5}+16x^{-8} \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2x^2-3x^{-1}+4x^{-4})$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে প্রথমে xএর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে রাশিটিকে সাজান হইল। x অপেক্ষা x^{-2}এর ঘাত কম, কারণ xএ ঘাতের সূচক 1 এবং x^{-2}এ ঘাতের সূচক -2, ইহা 1 অপেক্ষা কম। আবার বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ $-3x^{-1}$ কিরূপে নির্ণয় করা হইল দেখ। এখানে $-12x$কে ভাজকের $4x^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ পাওয়া যাইবে। -12কে 4 দিয়া ভাগ করিলে হয় -3 এবং ভাগে ঘাতগুলির বিয়োগফল লইতে হয় বলিয়া $x \div x^2$ করিয়া হইল $x^{1-2}=x^{-1}$. এইরূপে শেষবারে $16x^{-2} \div 4x^2$ করিয়া হইল $4x^{-2-2}=4x^{-4}$.]

উদা. 3. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-6\frac{x}{y}+6\frac{y}{x}+7$এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [C. U. 11]

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{x^2}{y^2}-\frac{6x}{y}+7+\frac{6y}{x}+\frac{y^2}{x^2} \;\big|\; \frac{x}{y}-3-\frac{y}{x} \\
 & \frac{x^2}{y^2} \\
\hline
\frac{2x}{y}-3 & -\frac{6x}{y}+7+\frac{6y}{x}+\frac{y^2}{x^2} \\
 & -\frac{6x}{y}+9 \\
\hline
\frac{2x}{y}-6-\frac{y}{x} & -2+\frac{6y}{x}+\frac{y^2}{x^2} \\
 & -2+\frac{6y}{x}+\frac{y^2}{x^2} \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\frac{x}{y}-3-\frac{y}{x}\right)$.

[দ্রষ্টব্য : $6\frac{x}{y}=\frac{6x}{y}$ ধরিতে হইবে। xএর ঘাতের অধঃক্রমে কিরূপে সাজান হইল দেখ। প্রথম আছে x^2, দ্বিতীয় পদে x ; তৃতীয় পদ রাখা হইল 7, কারণ এখানে x নাই অর্থাৎ xএর ঘাত $0 (7=7x^0)$। তারপর চতুর্থপদ হইল $\frac{y}{x}$; কারণ, $\frac{y}{x}=yx^{-1}$; এইরূপে $\frac{y^2}{x^2}=y^2.x^{-2}$. অতএব পর পর xএর ঘাতের সূচকগুলি হইবে 2, 1, 0, -1, -2.]

উদা. 4. $9a-12a^{\frac{1}{2}}-2+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}$এর বর্গমূল কত? [Pat. U. '30]

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9a-12a^{\frac{1}{2}}-2+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}\,(3a^{\frac{1}{2}}-2-a^{-\frac{1}{2}} \\
 & 9a \\
\hline
6a^{\frac{1}{2}}-2 & -12a^{\frac{1}{2}}-2+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1} \\
 & -12a^{\frac{1}{2}}+4 \\
\hline
6a^{\frac{1}{2}}-4-a^{-\frac{1}{2}} & -6+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1} \\
 & -6+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1} \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(3a^{\frac{1}{2}}-2-a^{-\frac{1}{2}})$.

[দ্রষ্টব্য : a-এর বর্গমূল $=a^{\frac{1}{2}}$; তৃতীয় ধাপের সময় $-6\div 6a^{\frac{1}{2}}$ করিয়া পাই $\dfrac{-6}{6a^{\frac{1}{2}}}=-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}}=-a^{-\frac{1}{2}}$; অর্থাৎ ভাজ্য -6এ a^0 আছে, ভাজকে $a^{\frac{1}{2}}$-কে $a^{-\frac{1}{2}}$ দ্বারা গুণ করিলে a^0 হয়, $\therefore$ বর্গমূলের তৃতীয় পদ $-a^{-\frac{1}{2}}$ হইল।]

উদা. 5. বর্গমূল নির্ণয় কর : $\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)+6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+7$. [C. U. '47]

প্রদত্ত রাশি $=x^4+\dfrac{1}{x^4}+6\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)+7=x^4+\dfrac{1}{x^4}+6x^2-\dfrac{6}{x^2}+7$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^4+6x^2+7-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4}\,(x^2+3-\frac{1}{x^2} \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2+3 & 6x^2+7-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4} \\
 & 6x^2+9 \\
\hline
2x^2+6-\frac{1}{x^2} & -2-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4} \\
 & -2-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4} \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(x^2+3-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে বন্ধনী তুলিয়া সাধারণ নিয়মে করা হইল। এইরূপ রাশিকে পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ করিয়া বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। পরে উদা. 6এ এইরূপ প্রশ্নের সমাধান দেখ।]

31. পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ করিয়া বর্গমূল নির্ণয়।

উদা. 6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

[C. U. '14 ; D. B. '38 ; E. B. S. B. '50 ; G. U. '48 ; P. U. '27].

প্রদত্ত রাশি $=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4x.\ \frac{1}{x}-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$ $[\because\ (a+b)^2=(a-b)^2+4ab]$

$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4-2.2\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2.2\left(x-\frac{1}{x}\right)+(2)^2$

$=\left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2.$ $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(x-2-\frac{1}{x}\right).$

অথবা, প্রদত্ত রাশি $=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4.x.\frac{1}{x}-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=a^2-4a+4\ \left[x-\frac{1}{x}=a \text{ ধরিয়া}\right]=(a-2)^2=\left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2.$

[ধরিবার **সঙ্কেত :** পূর্ণবর্গ করিয়া সাজাইতে হইলে দুইটি রাশির পূর্ণবর্গ এবং উহাদের গুণফলের দ্বিগুণ এই তিনটি পদ দেখাইতে হইবে অর্থাৎ $a^2\pm2ab+b^2$ এই আকারে সাজাইতে হয়। প্রদত্ত অঙ্কে $-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$ পূর্ণবর্গ নহে বলিয়া উহাই দুইটি রাশির গুণফলের দ্বিগুণ ; $\therefore$ একটি পদ $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ হইবে। এইজন্য অঙ্কের $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4.x.\frac{1}{x}$ ধরা হইল।]

উদা. 7. বর্গমূল নির্ণয় কর : $x^4+\frac{1}{x^4}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3.$ [C. U. '40]

প্রদত্ত রাশি $=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2x^2.\frac{1}{x^2}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3$

$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1=\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right).$

উদা. 8. দেখাও যে $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16$ একটি পূর্ণবর্গরাশি।

[C. U. '30, '36, '41]

প্রদত্ত রাশি $=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+16$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+16$

$=(a+7)(a+15)+16$ [$x^2-8x=a$ ধরিয়া]

$=a^2+22a+105+16=a^2+22a+121=(a+11)^2$

$=(x^2-8x+11)^2$, ইহা একটি পূর্ণবর্গ রাশি।

উদা. 9. $(x-2a)(x-5a)(x-8a)(x-11a)+81a^4$কে পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ কর। [C. U. '45]

প্রদত্ত রাশি $=(x-2a)(x-11a)(x-5a)(x-8a)+81a^4$

$=(x^2-13ax+22a^2)(x^2-13ax+40a^2)+81a^4$

$=(k+22a^2)(k+40a^2)+81a^4$ [$x^2-13ax=k$ ধরিয়া]

$=k^2+62ka^2+880a^4+81a^4=k^2+62ka^2+961a^4$

$=(k+31a^2)^2=(x^2-13ax+31a^2)^2$, ইহা একটি পূর্ণবর্গ রাশি।

উদা. 10. $(ab+ac+bc)^2-4abc(a+c)$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $ab+bc=x$, এবং $ac=y$,

সুতরাং $x=b(a+c)$, এবং $xy=abc(a+c)$.

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশি $=(x+y)^2-4xy=(x-y)^2=(ab+bc-ac)^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(ab+bc-ac)$.

উদা. 11. $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [C. U. '11]

প্রদত্ত রাশি $=\{(a-b)^2\}^2-2(a-b)^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2)^2+a^4+b^4-2a^2b^2$

$\left[\because\ 2(a^4+b^4)=(a^4+b^4)+a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+a^4+b^4\right]$

$=\{(a-b)^2-(a^2+b^2)\}^2+a^4+b^4-2a^2b^2$

$=\{a^2+b^2-2ab-a^2-b^2\}^2+a^4+b^4-2a^2b^2$

$=(-2ab)^2+a^4+b^4-2a^2b^2=4a^2b^2+a^4+b^4-2a^2b^2$

$=a^4+b^4+2a^2b^2=(a^2+b^2)^2$,

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(a^2+b^2)$.

32. করণীর বর্গমূল নির্ণয়

নিয়ম 1. কোন মূলদ রাশির বর্গমূল একটি মূলদ রাশি ও একটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি বা অন্তরফলের সমান হইতে পারে না।

প্রমাণ : যদি সম্ভব হয় মনে কর $\sqrt{x}=a\pm\sqrt{y}$.

এক্ষণে উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $x=a^2+y\pm2a\sqrt{y}$

বা, $\pm2a\sqrt{y}=x-a^2-y$, $\therefore\ \pm\sqrt{y}=\dfrac{x-a^2-y}{2a}$, সুতরাং একটি অমূলদ রাশি ($\sqrt{y}$) একটি মূলদ রাশির সমান হইতেছে; কিন্তু তাহা অসম্ভব।

নিয়ম 2. যদি $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ হয় এবং উহাতে x ও a দুইটিই মূলদ এবং $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ দুইটিই প্রকৃত অমূলদ রাশি হয়, তবে $x=a$ এবং $y=b$ হইবে।

প্রমাণ : যদি x ও a সমান না হয়, তবে মনে কর, $x=a+m$.

অতএব প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $a+m+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$

$\therefore\ \sqrt{b}=m+\sqrt{y}$, কিন্তু উহা অসম্ভব ; কারণ, একটি অমূলদ রাশি একটি মূলদ ও একটি অমূলদ রাশির সমষ্টির সমান হইতে পারে না। অতএব x ও a অসমান নহে।

$$\therefore\ x=a\ ;\ \text{অতএব}\ \sqrt{y}=\sqrt{b},\quad \therefore\ y=b.$$

[**দ্রষ্টব্য :** (i) উপরের নিয়মটিতে যদি $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ প্রকৃত অমূলদ না হয়, তবে ঐ নিয়ম সিদ্ধ হইবে না। যথা $3+\sqrt{16}=4+\sqrt{9}$ এই সমীকরণের উভয় পক্ষই সমান $(=7)$, কিন্তু ইহা হইতে উপরের নিয়মে বলা যায় না যে $3=4$ এবং $16=9$. অতএব দেখা যাইতেছে যে এই উদাহরণটিতে $\sqrt{16}$ ও $\sqrt{9}$ প্রকৃত অমূলদ সংখ্যা না হওয়ায় ঐ নিয়ম সিদ্ধ হইল না।

(ii) (উপরের নিয়মে) যদি $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ হয়, তবে $x-\sqrt{y}=a-\sqrt{b}$ হইবে। অতএব $x\pm\sqrt{y}=m\pm\sqrt{n}$ এই আকারের সমীকরণে উভয়পক্ষের মূলদ রাশিদ্বয় সমান এবং উভয়পক্ষের অমূলদ রাশিদ্বয়ও সমান ধরা যাইবে।

(1) **পর্যবেক্ষণের** সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী :—দুই পদযুক্ত দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য প্রথমে করণীটিকে $a+2\sqrt{b}$ এই আকারে পরিণত করিবে, তারপর দেখিয়া এরূপ দুইটি রাশি নির্ণয় করিবে যেন তাহাদের সমষ্টি a-এর সমান এবং গুণফল b-এর সমান হয়।

উদা. 12. $7+2\sqrt{12}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

এখানে এমন দুইটি সংখ্যা স্থির কর যাহাদের যোগফল$=7$ এবং গুণফল$=12$. 4 এবং 3 সেই সংখ্যাদ্বয়।

$$\therefore\ \text{প্রদত্ত রাশি}=4+3+2\sqrt{4.3}=(2)^2+(\sqrt{3})^2+2.2\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2.$$

$$\therefore\ \text{নির্ণেয় বর্গমূল}=\pm(2+\sqrt{3}).$$

[**দ্রষ্টব্য :** প্রত্যেক রাশির দুইটি করিয়া বর্গমূল হয়। যথা, 4-এর বর্গমূল ±2, a^2+b^2+2ab-র বর্গমূল $\pm(a+b)$. অতএব, উপরের উদাহরণে $-2-\sqrt{3}$ আর একটি বর্গমূল হয়। তোমরা $\pm(2+\sqrt{3})$ এইরূপে উত্তর লিখিবে।]

উদা. 13. বর্গমূল নির্ণয় কর : $2-\sqrt{3}$.

$2-\sqrt{3}=2-2.\frac{1}{2}.\sqrt{3}=2-2.\sqrt{\frac{1}{4}}.\sqrt{3}=2-2\sqrt{\frac{3}{4}}$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-2\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2.\sqrt{\frac{3}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

(2) যদি কোন সমীকরণে উভয় পক্ষেই মূলদ রাশি ও দ্বিঘাতকরণী থাকে, তবে উভয় পক্ষের মূলদ রাশিগুলি সমান এবং উভয় পক্ষের অমূলদ রাশিগুলি সমান হয়। এই নিয়মের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

উদা. 14. বর্গমূল নির্ণয় কর : $8-2\sqrt{15}$.

মনে কর, $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

বর্গ করিয়া পাই, $8-2\sqrt{15}=x+y-2\sqrt{xy}$

$\therefore$ মূলদ রাশিদ্বয় $x+y=8$ এবং অমূলদ রাশিদ্বয় $-2\sqrt{xy}=-2\sqrt{15}$.

$\therefore$ $(x+y)^2=64$ এবং $4xy=4.15=60$ [বর্গ করিয়া]

$\therefore$ $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=64-60=4$, $\therefore$ $x-y=\pm 2$.

এক্ষণে $x+y=8$

$x-y=\pm 2$

$\therefore$ $x=5$ এবং $y=3$, অথবা $x=3$, $y=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

উদা. 15. $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [B. U.]

মনে কর, $\sqrt{(a+b+\sqrt{2ab+b^2})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$;

বর্গ করিয়া পাই, $a+b+\sqrt{2ab+b^2}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\therefore$ $x+y=a+b\cdots(1)$ এবং $2\sqrt{xy}=\sqrt{2ab+b^2}$;

$\therefore$ $(x+y)^2=(a+b)^2$ এবং $4xy=2ab+b^2$.

এক্ষণে $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(a+b)^2-2ab-b^2=a^2$.

$\therefore$ $x-y=\pm a\cdots(2)$. এক্ষণে (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই

$x=a+\frac{b}{2}=\frac{2a+b}{2}$ এবং $y=\frac{b}{2}$, অথবা $x=\frac{b}{2}$ এবং $y=\frac{2a+b}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\sqrt{\frac{2a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}\right)$.

উদা. 16. $\sqrt{32}-\sqrt{24}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$\sqrt{32}-\sqrt{24}=\sqrt{8}(\sqrt{4}-\sqrt{3})=\sqrt{8}(2-\sqrt{3})$

$=\sqrt{8}\times\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$ [$\sqrt{3}$র সহগ 2 করা হইল]

$=2\sqrt{2}\times\frac{3+1-2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}(3+1-2\sqrt{3})=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}-1)$.

33. বর্গমূল সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান

উদা. 17. $x^4-6x^3+13x^2-12x+1$-এর সহিত কত যোগ করিলে একটি পূর্ণবর্গ রাশি হয়? [C. U. '15]

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^4-6x^3+13x^2-12x+1 \;\big|\; x^2-3x+2 \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2-3x & -6x^3+13x^2-12x+1 \\
 & -6x^3+9x^2 \\
\hline
2x^2-6x+2 & 4x^2-12x+1 \\
 & 4x^2-12x+4 \\
\hline
 & -3
\end{array}
$$

রাশিমালাটি পূর্ণবর্গ হইলে অবশিষ্ট কিছু থাকিবে না, অর্থাৎ অবশিষ্ট শূন্য হইবে। এখানে অবশিষ্ট আছে -3, ইহার সহিত $+3$ যোগ করিলে অবশিষ্ট শূন্য হইবে। সুতরাং রাশিটিতে 3 যোগ করিলে উহা পূর্ণবর্গ হইবে।

উদা. 18. $4x^4-12x^3-7x^2+25x+14$ হইতে কত বিয়োগ করিলে একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে?

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^4-12x^3-7x^2+25x+14 \;\big|\; 2x^2-3x-4 \\
 & 4x^4 \\
\hline
4x^2-3x & -12x^3-7x^2+25x+14 \\
 & -12x^3+9x^2 \\
\hline
4x^2-6x-4 & -16x^2+25x+14 \\
 & -16x^2+24x+16 \\
\hline
 & x-2
\end{array}
$$

রাশিটি পূর্ণবর্গ হইলে অবশিষ্ট শূন্য হইবে। এক্ষেত্রে অবশিষ্ট আছে $x-2$.

$\therefore$ রাশিটি হইতে $x-2$ বিয়োগ করিলে একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে।

[দ্রষ্টব্য : (1) কি যোগ করিলে পূর্ণবর্গ হইবে, এরূপ প্রশ্নে অবশিষ্ট যাহা থাকিবে তাহাকে বিপরীত sign বিশিষ্ট করিয়া উত্তর হইবে। যথা, যদি $-a+2$ অবশিষ্ট থাকে, তবে উত্তর হইবে $a-2$. (2) কত বিয়োগ করিলে পূর্ণবর্গ হইবে প্রশ্ন থাকিলে, অবশিষ্ট যাহা থাকে তাহাই উত্তর হয়।]

উদা. 19. n-এর মান কত হইলে $16x^4-24x^3+41x^2-nx+16$ পূর্ণবর্গ হইবে? [C. U. '14]

$$
\begin{array}{r|l}
 & 16x^4-24x^3+41x^2-nx+16 \;\big|\; 4x^2-3x+4 \\
 & 16x^4 \\
\hline
8x^2-3x & -24x^3+41x^2-nx+16 \\
 & -24x^3+9x^2 \\
\hline
8x^2-6x+4 & 32x^2-nx+16 \\
 & 32x^2-24x+16 \\
\hline
 & 24x-nx
\end{array}
$$

এখানে যদি $24x-nx=0$ হয়, তাহা হইলে রাশিটি পূর্ণবর্গ হইবে।

$\therefore \quad 24x-nx=0, \quad \therefore \quad nx=24x, \quad \therefore \quad n=24$ (উত্তর)

উদা. 20. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+c$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইলে cএর মান কত ?

প্রদত্ত রাশি$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+c$

$=(a+4)(a+6)+c$ [$x^2+5x=a$ ধরিয়া]$=a^2+10a+24+c$

$=a^2+2.5.a+(5)^2+c-1=(a+5)^2+c-1$

$\because$ এক্ষেত্রে রাশিটি পূর্ণবর্গ, $\therefore \quad c-1=0$ হইবে। $\therefore$ এখানে $c=1$.

উদা. 21. কি সর্তে x^2+px+q একটি পূর্ণবর্গ রাশি হয় ? [G. U. '51]

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^2+px+q \;\big|\; x+\frac{p}{2} \\
 & x^2 \\
\hline
2x+\frac{p}{2} & px+q \\
 & px+\frac{p^2}{4} \\
\hline
 & -\frac{p^2}{4}+q
\end{array}
$$

এক্ষেত্রে রাশিটি পূর্ণবর্গ হইবে যদি $-\frac{p^2}{4}+q=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $p^2=4q$ হয়। $\therefore$ নির্ণেয় সর্ত $p^2=4q$.

Exercise 9

বর্গমূল নির্ণয় কর :—

1. $a^2+2ab+b^2$.
2. $x^4-4x^3y+18x^2y^2-28xy^3+49y^4$. [C. U. '33]
3. $x^6+6x^5+x^4-20x^3+28x^2-16x+4$. [C. U. '49]
4. $x^4-2ax^3+5a^2x^2-4a^3x+4a^4$. [C. U. '26]
5. $a^{-4}+b^{-4}-a^{-2}b^{-2}+2a^{-3}b^{-1}-2a^{-1}b^{-3}$.
6. $4x^{\frac{3}{2}}-12x^{\frac{3}{4}}+25-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}$.
7. $49x^4+36y^4+109x^2y-70x^3y-60xy^3$. [C. U. '18]
8. $x^4-x^3-\frac{7x^2}{4}+x+1$. [C. U. '13]
9. $x^4-6x^3+2ax(x-3)+9x^2+a^2$.
10. $1+2a+2a^2+a^3+\frac{a^4}{4}$. [C. U. '17]

11. $x^2-6x+5+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}$. [G. U. '16]

12. $\frac{x^2}{y^2}-\frac{2x}{y}+3-\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$. [C. U. 1909]

13. $4a^4+9a^{-4}+6a^{-2}+4a^2+13$.

14. $x^4-2x^3+\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$. [C. U. '25, '51]

15. $x^4-2x^2+3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}$. [C. U. '34]

16. $x^{\frac{4}{3}}-4x+1+6x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}$.

17. $\frac{x^4}{4}+4x^2+\frac{ax^2}{3}+\frac{a^2}{9}-2x^3-\frac{4ax}{3}$. [C. U. '19 ; Pat. U. '18]

18. $x^4+6x^3+11x^2+8x+7+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$. [C. U. '32]

19. $x^4+\frac{1}{x^2}+2x+6+6x^3+9x^2$. [C. U. '50]

20. $x^4+4x+2+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}$. [C. U. '28, '39, '42]

21. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{7}{4}$. [D. B. '22 ; B. U.]

22. $4x^3+5+x^{-3}-4x^{\frac{3}{2}}-2x^{-\frac{3}{2}}$. 23. $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1$.

24. $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-2\left(a+\frac{1}{a}\right)+3$. [A. U.]

25. $4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-12\left(x-\frac{1}{x}\right)+1$. [B. U.]

25. (a) $\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2-14\left(a-\frac{1}{2a}\right)+47$. [S. F. '58]

26. $4a^4+9\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-12a^2\left(a+\frac{1}{a}\right)+18$ [Pat. '28]

27. $4x^4-12x^3y+25x^2y^2-25xy^3+16y^4$. [G. U. '50]

28. $x^4-2ax^3+(a^2+2b^2)x^2-2ab^2x+b^4$. [C. U. '48]

29. $x^6+\frac{1}{x^6}-4x^4+4\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+2$. [E. B. S. B. '48 ; B.U.]

30. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1$. [G. U. '49]

31. $(3x^2-11x+6)^2+12x(3x-2)^2$. [M. U. 1905]

[Hints : রাশিটি $=\{(3x-2)(x-3)\}^2+12x(3x-2)^2$
$=(3x-2)^2(x^2-6x+9)+12x(3x-2)^2$
$=(3x-2)^2(x^2+6x+9)=(3x-2)^2(x+3)^2\cdots$]

32. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$ [C. U. '45 ; W. B. S. F. '52]

33. $(x-1)(x-4)(x-7)(x-10)+81$. 34. $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

35. $x^4+y^4+(x+y)^4$. [Pat. '26]

[Hints : রাশিটি $=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+\{(x+y)^2\}^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$+(x^2+y^2+2xy)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x^2+y^2)^2+4x^2y^2$
$+4xy(x^2+y^2)=2(x^2+y^2)^2+4xy(x^2+y^2)+2x^2y^2$
$=2\{(x^2+y^2)^2+2xy(x^2+y^2)+(xy)^2\}=2(x^2+y^2+xy)^2$.
$\therefore$ বর্গমূল $=\pm\sqrt{2}(x^2+y^2+xy)$].

36. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$.

37. $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4-2a^2b^2}+4\frac{a}{a+b}\times\frac{b}{a-b}$.

38. $(1-6a^2+a^4)^2+16a^2(1-a^2)^2$. [C. U. '20]

39. $14-6\sqrt{5}$. 40. $5-2\sqrt{6}$ 41. $4+\sqrt{7}$.

42. $33-4\sqrt{35}$. 43. $ax-2a\sqrt{ax-a^2}$. 44. $\sqrt{48}-\sqrt{45}$.

45. (i) $\sqrt{252}-\sqrt{245}$. (ii) $\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})$.

46. $2x+2\sqrt{x^2-9y^2}$. 47. $12x+2y-4\sqrt{6xy}$.

48. প্রমাণ কর যে, m^2-n পূর্ণবর্গ রাশি না হইলে $\sqrt{m+\sqrt{n}}$-কে $\sqrt{x}+\sqrt{y}$এর আকারে প্রকাশ করা সম্ভব নহে।

49. xএর মান কত হইলে $x^4+6x^3+11x^2+3x+31$ পূর্ণবর্গ হইবে? [C. U. '27, '41]

50. cএর মান কত হইলে $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+c$ পূর্ণবর্গ হইবে? [C. U. '50]

51. mএর কত মানে $16x^4-24x^3-mx^2-24x+16$ পূর্ণবর্গ হয় ?

[Pat. '26]

52. $4a^4-12a^3-7a^2+23a+14$এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফলটি পূর্ণবর্গ হইবে ? [C. U. '21 ; W. B. S. F. '53]

53. $a^4-4a^3+6a^2-5a+2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে অন্তরফলটি পূর্ণবর্গ রাশি হয় ?

54. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে পূর্ণবর্গ রাশি হইবে ?

55. কোন্ সর্তে x^2-px+q একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে ?

56. প্রমাণ কর যে, $33\times34\times35\times36+1$ একটি পূর্ণবর্গ।

57. $249\times247\times245\times243$এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে ?

ঘনমূল নির্ণয় (Extraction of cube root)

34. কোন পদের ঘনমূল নির্ণয়ের প্রক্রিয়া সম্বন্ধে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে। এক্ষণে কোন রাশির ঘনমূল নির্ণয়ের প্রক্রিয়া দেখান হইতেছে।

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, এই সূত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$এর ঘনমূল $a+b$. এখন এই ঘনমূলের a ও b পদ দুইটি কিরূপে নির্ণয় করা যায় তাহাই স্থির করিতে হইবে।

প্রথমে প্রদত্ত রাশিকে a বা bএর অধঃক্রম অনুসারে সাজাইতে হইবে। এখন দেখা যায় যে, রাশিটির প্রথম পদ a^3এর ঘনমূল a. ইহাকে ঘনমূলের প্রথম পদ করিয়া বসান হইল এবং রাশিটি হইতে a^3 বিয়োগ করিয়া $3a^2b+3ab^2+b^3$ বা $(3a^2+3ab+b^2)\times b$ অবশিষ্ট পাওয়া গেল। অতএব এই অবশিষ্ট রাশিকে $3a^2+3ab+b^2$ দিয়া ভাগ করিয়াই ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ bকে পাওয়া যায়। এখন দেখ এই ভাজক $3a^2+3ab+b^2$এ নিম্নরূপ তিনটি পদ আছে :—

(1) ঘনমূলের পূর্ব বা প্রথম পদ aএর বর্গের 3 গুণ অর্থাৎ $3a^2$;

(2) প্রথম পদ a এবং নূতন দ্বিতীয় পদ bএর গুণফলের 3 গুণ অর্থাৎ $3ab$;

(3) দ্বিতীয় পদ bএর বর্গ অর্থাৎ b^2.

এই প্রক্রিয়াটিকে নিয়ে সাজান হইতেছে :—

উদা. 1.

$$\begin{array}{r|l} & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\ (a+b \\ & a^3 \\ \hline 3(a)^2=3a^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ 3\times a\times b= \quad +3ab & \\ (b)^2= \quad\quad +b^2 & \\ \hline 3a^2+3ab+b^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ & \overline{\quad\quad} \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=a+b$.

উদা. 2. $8x^3-12x^2+6x-1$এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r|l} & 8x^3-12x^2+6x-1\ (2x-1 \\ & 8x^3 \\ \hline 3(2x)^2=12x^2 & -12x^2+6x-1 \\ 3\times 2x\times -1= \quad -6x & \\ (-1)^2= \quad\quad +1 & \\ \hline 12x^2-6x+1 & -12x^2+6x-1 \\ & \overline{\quad\quad} \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=2x-1$.

[দ্রষ্টব্য : দ্বিতীয় পদটি নির্ণয় করিবার জন্য দেখিবে $12x^2$কে কি দিয়া গুণ করিলে প্রথম অবশিষ্টের প্রথম পদ $-12x^2$ হয় ; সুতরাং দ্বিতীয় পদ হইবে -1. অন্যরূপেও দেখ প্রদত্ত রাশির শেষ পদ -1এর ঘনমূলই হইবে ঘনমূলের শেষ বা দ্বিতীয় পদ।]

উদা. 3. 79507এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

এখানে দেখা যাইতেছে যে 79507 সংখ্যাটি 64,000 এবং 125,000এর অর্থাৎ $(40)^3$ ও $(50)^3$এর মধ্যবর্তী ; সুতরাং উহার ঘনমূলটি 40 ও 50এর মধ্যবর্তী দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইবে।

$$\begin{array}{r|l} & 79507\ (\ 40+3=43 \\ & 64000 \\ \hline 3(40)^2=4800 & 15507 \\ 3\times 40\times 3=\ \ 360 & \\ (3)^2=\quad\ 9 & \\ \hline 5169 & 15507 \\ & \overline{\quad\quad} \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=43$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে সংখ্যাটির এককের অঙ্ক 7 আছে, আবার 3 ভিন্ন অন্য কোন সংখ্যার ত্রিঘাতের এককের অঙ্ক 7 হইতে পারে না। $\therefore$ ঘনমূলের দ্বিতীয় অঙ্কটি 3 ধরা হইল।]

উদা. 4. $8a^6+12a^5b-30a^4b^2-35a^3b^3+45a^2b^4+27ab^5-27b^6$এর ঘনমূল কত ?

$$8a^6+12a^5b-30a^4b^2-35a^3b^3+45a^2b^4+27ab^5-27b^6\ \big(\ 2a^2+ab-3b^2$$

$$8a^6$$

$$\overline{\qquad 12a^5b-30a^4b^2-35a^3b^3+45a^2b^4+27ab^5-27b^6}$$

$$\begin{aligned} 3\times(2a^2)^2 &= 12a^4 \\ 3\times(2a^2)\times(ab) &= \qquad +6a^3b \\ (ab)^2 &= \qquad\qquad +a^2b^2 \\ \hline & 12a^4+6a^3b+a^2b^2 \end{aligned} \qquad 12a^5b+6a^4b^2+a^3b^3$$

$$\overline{\qquad -36a^4b^2-36a^3b^3+45a^2b^4+27ab^5-27b^6}$$

$$\begin{aligned} 3(2a^2+ab)^2 &= 12a^4+3a^2b^2+12a^3b \\ 3(2a^2+ab)\times(-3b^2) &= \qquad -18a^2b^2 \qquad -9ab^3 \\ (-3b^2)^2 &= \qquad\qquad\qquad +9b^4 \\ \hline & 12a^4+12a^3b-15a^2b^2-9ab^3+9a^4 \end{aligned} \qquad -36a^4b^2-36a^3b^3+45a^2b^4+27ab^5-27b^6$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=2a^2+ab-3b^2$.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে ঘনমূলের প্রথম পদ $2a^2$ পাওয়া গিয়াছে। উহার বর্গের 3 গুণ করিলে $12a^4$ হয়, উহাকে ab দিয়া গুণ করিলে প্রথম অবশিষ্টের প্রথম পদ $12a^5b$ হয়, সুতরাং ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ হইল $+ab$. এক্ষণে পূর্বের নিয়মে প্রথম ভাজক হইল, $12a^4+6a^3b+a^2b^2$, উহাকে ab দিয়া গুণ করিয়া গুণফল প্রথম অবশিষ্ট হইতে বিয়োগ করিয়া দ্বিতীয় অবশিষ্ট পাওয়া গেল। পুনরায় ঘনমূলের যে অংশ পাওয়া গিয়াছে তাহার বর্গের 3 গুণ করিয়া হইল $12a^4+3a^2b^2+12a^3b$. এখন ইহার প্রথম পদ $12a^4$ দিয়া দ্বিতীয় অবশিষ্টের প্রথম পদ $-36a^4b^2$কে ভাগ করিলে $-3b^2$ হয়, সুতরাং উহাই ঘনমূলের তৃতীয় পদ হইবে। তারপর পূর্বের নিয়মে প্রক্রিয়াটি সম্পূর্ণ করা হইল।]

Exercise 10

ঘনমূল নির্ণয় কর :—

1. $125a^9b^{12}$ 2. $-729x^6y^{-3}$ 3. $-\frac{216a^{15}}{343b^{18}}$.

4. $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ 5. a^3-3a^2+3a-1

6. $1+3a+6a^2+7a^3+6a^4+3a^5+a^6$

7. $8a^3x^3-27b^3y^3-36a^2x^2by+54axb^2y^2$

8. $54-27x^3+\frac{8}{x^6}-\frac{36}{x^3}$ 9. $\frac{a^3}{8}+\frac{3a^2}{4}+\frac{3a}{2}+1$

10. 614125 11. $64x^6-125y^6+300x^2y^4-240x^4y^2$

12. $8a^3+b^3+c^3+12a^2b+12abc+6ab^2+12a^2c+6ac^2+3b^2c+3bc^2$

13. $8a^6+12a^5-30a^4-35a^3+45a^2+27a-27$.

Quadratic Equations (দ্বিঘাত সমীকরণ)

35. **দ্বিঘাত সমীকরণ।** যে সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিটি দ্বিঘাত অপেক্ষা উচ্চতর ক্রমের নহে (অর্থাৎ যাহাতে অজ্ঞাত রাশিটির সর্বোচ্চ ঘাত 2) তাহাকে, **দ্বিঘাত** (quadratic) **সমীকরণ** বা **দ্বিতীয় মানের** (of the second degree) সমীকরণ বলে। যথা, $x^2=25$, $3x^2+5x=4$, $ax^2+bx+c=0$, ইত্যাদি।

36. **অমিশ্র এবং মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ।** (1) যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটি কেবলমাত্র দ্বিঘাত-বিশিষ্ট, তাহাকে অমিশ্র দ্বিঘাত (pure quadratic) সমীকরণ বলে। যথা, $x^2=4$, $ax^2-5=0$.

(2) যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশি প্রথম ও দ্বিতীয় ঘাতের হয়, তাহাকে **মিশ্র দ্বিঘাত** (adfected quadratic) সমীকরণ বলে। যথা, $3x^2-4x=15$. এরূপ সমীকরণের সাধারণ আকার $ax^2+bx+c=0$. cকে constant (ধ্রুবক) term বা absolute term বলে।

অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

প্রথমে অজ্ঞাত রাশিগুলিকে বামপক্ষে এবং জ্ঞাত রাশিগুলিকে ডানপক্ষে লইয়া গিয়া সাধারণভাবে x^2-এর মান নির্ণয় করিয়া তাহার বর্গমূল নির্ণয় করিলে অজ্ঞাত রাশির মান পাওয়া যায়। x-এর মানগুলিকে সমীকরণের বীজ (roots) বলে।

উদাহরণমালা 11

সমাধান কর :—

উদা. 1. $3x^2-36=64-x^2$.

$3x^2-36=64-x^2$, বা $3x^2+x^2=64+36$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $4x^2=100$, বা, $x^2=25$,

$\therefore$ $x=\pm 5$. [অর্থাৎ $x=5$ অথবা -5]

উদা. 2. $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{10}{3}$. [C. U. '12 ; D. B. '22]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$$\frac{(x+4)^2+(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}=\frac{10}{3}, \text{ বা, } \frac{2x^2+32}{x^2-16}=\frac{10}{3},$$

বা, $10x^2-160=6x^2+96$, বা, $4x^2=256$, $x^2=64$, $\therefore$ $x=\pm 8$.

মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

(1) উৎপাদক নির্ণয় দ্বারা সমাধান

উদা. 1. $4x^2+25x-351=0$. [D. B. '27]

$4x^2+25x-351=0$, বা, $4x^2+52x-27x-351=0$,

বা, $4x(x+13)-27(x+13)=0$, বা, $(x+13)(4x-27)=0$.

এখানে $\because$ দুইটি উৎপাদকের গুণফল শূন্য, $\therefore$ উহাদের একটি অবশ্যই শূন্য হইবে। যদি $x+13=0$ হয়, তবে $x=-13$; আর যদি $4x-27=0$ হয়, তবে $4x=27$, $\therefore$ $x=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}$, $\therefore$ সমাধান হইল $x=-13$ অথবা $6\frac{3}{4}$.

উদা. 2. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{6(x-2)}{x-6}=1$. [C. U. '51]

এখানে, $\dfrac{6(x-2)}{x-6}=1-\dfrac{x-2}{x+2}$, বা, $\dfrac{6(x-2)}{x-6}=\dfrac{x+2-x+2}{x+2}$,

বা, $\dfrac{6(x-2)}{x-6}=\dfrac{4}{x+2}$, বা, $\dfrac{3(x-2)}{x-6}=\dfrac{2}{x+2}$,

বা, $3(x^2-4)=2(x-6)$, বা, $3x^2-12=2x-12$,

বা, $3x^2-2x-12+12=0$, বা, $3x^2-2x=0$,

বা, $x(3x-2)=0$, $\therefore$ হয়, $x=0$, অথবা, $3x-2=0$.

অতএব, $x=0$, বা, $\frac{2}{3}$.

উদা. 3. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+b}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}$. [C. U. '21]

সমীকরণটি হইতে পাই, $\dfrac{x+b-x}{x(x+b)}=\dfrac{a+b-a}{a(a+b)}$, বা, $\dfrac{b}{x^2+bx}=\dfrac{b}{a^2+ab}$,

বা, $x^2+bx=a^2+ab$, বা, $x^2+bx-a^2-ab=0$,
বা, $(x+a)(x-a)+b(x-a)=0$, বা, $(x-a)(x+a+b)=0$,
$\therefore$ হয় $x-a=0$ অথবা, $x+a+b=0$, $\therefore$ $x=a$, বা, $-(a+b)$.

[C. U. '30]

উদা. 4. $x=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-x}}}$

এখানে, $x=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\dfrac{4-2x-1}{2-x}}}$, বা, $x=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\dfrac{3-2x}{2-x}}}$, বা, $x=\dfrac{1}{2-\dfrac{2-x}{3-2x}}$

বা, $x=\dfrac{1}{\dfrac{6-4x-2+x}{3-2x}}$, বা, $x=\dfrac{1}{\dfrac{4-3x}{3-2x}}$, বা, $x=\dfrac{3-2x}{4-3x}$,

বা, $4x-3x^2=3-2x$, বা, $-3x^2+6x-3=0$,
বা, $x^2-2x+1=0$ (-3 দ্বারা ভাগ করিয়া)
বা, $(x-1)^2=0$, $\therefore$ $x=1, 1$.

[দ্রষ্টব্য : $(x-1)^2=0$, অর্থাৎ $(x-1)(x-1)=0$. $\therefore$ xএর মান 1, 1, হইবে।]

উদা. 5. $\dfrac{1}{a+b+x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{x}$. [D. B. '40, '43, '48]

বা, $\dfrac{1}{a+b+x}=\dfrac{bx+ax+ab}{abx}$, বা, $(a+b+x)(bx+ax+ab)=abx$,
বা, $(a+b+x)(bx+ax+ab)-abx=0$, বা, $(a+b)(a+x)(b+x)=0$,
বা, $(a+x)(b+x)=0$, $\therefore$ হয় $a+x=0$ অথবা, $b+x=0$,
$\therefore$ $x=-a$, বা, $-b$.

(2) পূর্ণবর্গে পরিণত করিয়া সমাধান

প্রথমে সমীকরণটিকে সাধারণ আকারে পরিণত করিয়া x-বিহীন পদগুলিকে ডানদিকে পক্ষান্তর কর। উভয় পক্ষকে x^2-এর সহগ দ্বারা ভাগ কর। **xএর সহগের অর্ধেকের বর্গ** উভয় পক্ষে যোগ কর। ইহাতে বামপক্ষটি পূর্ণবর্গ হইয়া যাইবে। নিম্নে উদাহরণগুলি দেখ।

সমাধান কর : [D. B. '29]

উদা. 1. $x^2-26x=407$.

$x^2-26x=407$, বা, $x^2-26x+(13)^2=407+(13)^2$

বা, $(x-13)^2=407+169=576$, বা, $(x-13)=\pm\sqrt{576}$.

বা, $x-13=\pm 24$, $\therefore\ x=13\pm 24=37$, বা, -11.

[**দ্রষ্টব্য** : এখানে xএর সহগ -26, উহার অর্ধেক -13 ; $\therefore (-13)^2$ বা $(13)^2$ উভয়দিকে যোগ করা হইল। xএর মান একটি হইল $(13+24)$, অন্যটি $(13-24)$]

উদা 2. $ax^2+bx+c=0.$ [C. U. '46]

উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$,

বা, $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$, বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

[উভয়পক্ষে $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ যোগ করিয়া]

বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, বা, $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore\ x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সকল দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ এই সাধারণ আকারে পরিণত করা যায়। তারপর $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a_c}}{2a}$ এই সূত্রের সাহায্যে তাহার সমাধান করা যায়। এই সূত্রটি ভালভাবে বুঝিয়া **প্রয়োগ করিবে।** **ইহার ব্যাখ্যা :** সমীকরণে আছে x^2-এর সহগ a, এবং x-এর সহগ b এবং x-বিহীন পদ c, সূত্রের লব হইবে বিপরীত sign-যুক্ত x-এর সহগ, তারপর, $\pm\sqrt{\ }$ চিহ্নের মধ্যে হইবে x-এর সহগের বর্গ (অর্থাৎ b^2) বিযুক্ত x^2-এর সহগ ও x-বিহীন পদের গুণফলের 4 গুণ অর্থাৎ $-4ac$. আর হরে হইবে x^2-এর সহগের দ্বিগুণ। এখানে x-এর value দুইটি কি কি দেখ।

একটি হইল $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, অন্যটি হইল $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$]

2. (a) উপরের সূত্রটির সাহায্যে $x^2-2\sqrt{3}x-13=0$-এর সমীকরণের বীজগুলি নির্ণয় কর। [C. U. '46]

(3) সূত্রের সাহায্যে সমাধান

উদা. 1. সমাধান কর : $x^2-2\sqrt{17}x-8=0.$ [C. U. '47]

এখানে, $x=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{(2\sqrt{17})^2-4\times 1\times -8}}{2\times 1}=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{68+32}}{2}$

$=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{2\sqrt{17}+10}{2}=\sqrt{17}\pm 5.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}=\frac{1}{6}$. [C. U. '37]

সমীকরণ হইতে $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{6}$,

বা, $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{6}$, বা, $\frac{x-1-x+4}{(x-4)(x-1)}=\frac{1}{6}$, বা, $\frac{3}{x^2-5x+4}=\frac{1}{6}$,

বা, $x^2-5x+4=18$, বা, $x^2-5x-14=0$, বা, $(x-7)(x+2)=0$,

$\therefore$ হয় $x-7=0$ অথবা $x+2=0$, $\therefore$ $x=7$ বা -2.

[দ্রষ্টব্য : $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$কে $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$ এইরূপ আকারে লেখা যায়, কারণ, $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$ কষিয়া ঐ $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ হয়। এইভাবে বাকী পদ দুইটিও লেখা হইল।]

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}+\frac{1}{x+3a}=\frac{3}{x}$ [C. U. '50]

এখানে সমীকরণ হইতে, $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2a}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3a}-\frac{1}{x}=0$,

বা, $\frac{x-x-a}{x(x+a)}+\frac{x-x-2a}{x(x+2a)}+\frac{x-x-3a}{x(x+3a)}=0$,

বা, $\frac{-a}{x(x+a)}+\frac{-2a}{x(x+2a)}+\frac{-3a}{x(x+3a)}=0$, বা, $\frac{1}{x+a}+\frac{2}{x+2a}+\frac{3}{x+3a}=0$,

বা, $\frac{1}{x+a}+\frac{3}{x+3a}=\frac{-2}{x+2a}$, বা, $\frac{x+3a+3x+3a}{(x+a)(x+3a)}=\frac{-2a}{x+2a}$,

বা, $\frac{4x+6a}{x^2+4ax+3a^2}=\frac{-2}{x+2a}$, বা, $\frac{2x+3a}{x^2+4ax+3a^2}=\frac{-1}{x+2a}$,

বা, $2x^2+7ax+6a^2=-x^2-4ax-3a^2$, বা, $3x^2+11ax+9a^2=0$

$\therefore$ $x=\frac{-11a\pm\sqrt{(11a)^2-4.3.9a^2}}{6}=\frac{-11a\pm\sqrt{13a^2}}{6}$.

$=\frac{-11a\pm a\sqrt{13}}{6}=\frac{-11\pm\sqrt{13}}{6}a$.

5. শ্রীধর আচার্যের প্রণালী বা হিন্দুপ্রণালী

প্রদত্ত সমীকরণকে প্রথমে $ax^2+bx+c=0$ এই সাধারণ আকারে পরিণত করিবে। যথা, $(x-2)^2=3x+5$ সমীকরণকে $x^2-4x+4=3x+5$, বা,

$x^2-7x-1=0$ এইভাবে লিখিবে। x-বিহীন পদ c-কে ডানদিকে লইয়া যাও। উভয়পক্ষকে x^2-এর সহগের 4 গুণ (এখানে $4a$) দ্বারা গুণ কর। তারপর উভয়পক্ষে x-এর সহগের বর্গ (এখানে b^2) যোগ কর। ইহাতে বামদিকে একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে।

উদাহরণ। সমাধান কর : $x^2-2\sqrt{7}x-2=0$. [G. U. '48]

এখানে $x^2-2\sqrt{7}x=2$, বা, $4x^2-8\sqrt{7}x=8$ [উভয়পক্ষকে 4×1 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $4x^2-8\sqrt{7}x+(2\sqrt{7})^2=(2\sqrt{7})^2+8$ [উভয়পক্ষে xএর সহগের বর্গ $(-2\sqrt{7})^2$ বা, $(2\sqrt{7})^2$ যোগ করিয়া]

বা, $(2x-2\sqrt{7})^2=28+8=36$, বা, $2x-2\sqrt{7}=\pm6$,

বা, $2x=2\sqrt{7}\pm6$, $\therefore$ $x=\sqrt{7}\pm3$.

Exercise 11

সমাধান কর :

1. $5x^2+3=128$.
2. $(2x-1)^2=5-4x$.
3. $2x-\frac{3}{x}=\frac{x}{2}$.
4. $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+8}{x+4}$ [C. U. '31]
5. $42x^2-41x-20=0$ [C. U. '13]
6. $3x^2-10x+3=0$. [C. U. '33]
7. $4x^2-65x+126=0$. [C.U.]

7. (a) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+5}=\frac{1}{2}$.

8. $6x^2-11x-10=0$ [C. U. '22]
9. $(17x-8)(x-2)=555$. [C. U. '32]
10. $17x^2+19x=1848$.
11. $6x^2-91x+323=0$. [C.U. '14]
12. $(x-7)(x-19)=64$. [C. U. '18]
13. $(x+4)(2x-3)=6$.

13. (a) $\frac{3x+4}{x+2}=\frac{x+5}{x+1}$.

14. $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$. [C. U. '31]
15. $x^2-6x+2=0$. [G. U. '48]
16. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=2\frac{1}{6}$. [E. B. S. B. '50]
17. $x^2-2\sqrt{13}x+4=0$ [C. U. '49]
18. $\frac{x+3}{x-3}+6\frac{x-3}{x+3}=5$. [W. B. S. F. '52]
19. $\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0$. [C. U. '11]
20. $\frac{12x+17}{3x+1}-\frac{2x+15}{x+7}=3\frac{1}{5}$. [C. U. '20]
21. $\frac{40}{x-5}+\frac{27}{x}=13$. [D. B. '26]

22. $\frac{x-5}{x+2}+\frac{x-10}{x+6}+2=0$. [C. U. '28] 23. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$. [C. U. '36]

24. $\frac{x+1}{2}+\frac{2}{x+1}=\frac{x+1}{3}+\frac{3}{x+1}-\frac{5}{6}$.

25. $\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=\frac{2(x-4)}{x-4}$. 26. $\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2-5\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+6=0$. [P. U.]

27. $1+x=\frac{3}{4-\frac{3}{4-x}}$. [C. U. '44] 28. $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$. [D. B. '49]

29. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$. [C. U. '26, '29 ; D. B. '50]

30. $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলি নির্ণয় কর। [C.U. '45 ; G.U.'42]

31. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. [P. U. 1891]

32. $ax^2-bx-c=0$. [C. U '44] 33. $\frac{1}{p+q+x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{x}$.

কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া সমাধান কর :

34. $3x^2+4x=8$. [C. U. '51]

35. $x^2-x=1806$. [C. U. '17] 36. $63x^2-62x=221$.

37 xএর মান কত হইলে $ax^2-(a+1)x+1=0$ হইবে ?

সূচকীয় সমীকরণ

উদাহরণমালা 12

নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান কর :

উদা. 1. $4\times2^{x-1}=8^x$. [D. B. '31]

$4\times2^{x-1}=8^x$, বা, $2^2\times2^{x-1}=(2^3)^x$,

বা, $2^{x-1+2}=2^{3x}$, বা, $2^{x+1}=2^{3x}$, $\therefore$ $3x=x+1$, বা, $2x=1$,

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে 4 ও 8-কে 2-এর ঘাতে প্রকাশ করিয়া $4=2^2$, $8=2^3$ লেখা হইল। এইরূপ করিতে হয়। তারপর দেখ, 2^{x+1} এবং 2^{3x} সমান হওয়ায় 2-এর ঘাতের সূচক দুইটি অবশ্যই সমান। $\therefore$ $x+1=3x$ লেখা হইল।]

উদা. 2. $2^{x+1}=\sqrt[x]{64}$.

$2^{x+1}=\sqrt[x]{64}$, বা, $2^{x+1}=64^{\frac{1}{x}}$

বা, $2^{x+1}=(2^6)^{\frac{1}{x}}$, [এখানে 64-কে 2-এর ঘাতে প্রকাশ করা হইল।]

বা, $2^{x+1}=2^{\frac{6}{x}}$, $\therefore$ $x+1=\frac{6}{x}$, বা, $x^2+x=6$.

বা, $x^2+x-6=0$, বা, $(x-2)(x+3)=0$,

$\therefore$ হয় $x-2=0$ অথবা $x+3=0$. $\therefore$ $x=2$, বা, -3.

উদা. 3. $4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+3}=800000$.

$4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+3}=800000$,

বা, $4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+2}\times 5=800000$,

বা, $4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+2}=160000$

[উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $(20)^{x^2+x+2}=(20)^4$, $\therefore$ $x^2+x+2=4$,

বা, $x^2+x-2=0$, বা, $(x-1)(x+2)=0$,

$\therefore$ হয় $x-1=0$ অথবা, $x+2=0$, $\therefore$ $x=1$, বা, -2.

উদা. 4. $4.3^{x+1}=27+9^x$. [C. U. '51]

$4.3^{x+1}=27+9^x$, বা, $4.3^x.3=27+3^{2x}$,

বা, $12.3^x=27+(3^x)^2$, বা, $12p=27+p^2$ [$3^x=p$ ধরিয়া]

বা, $p^2-12p+27=0$, বা, $(p-9)(p-3)=0$, $\therefore$ $p=9$ বা 3.

$\therefore$ $3^x=9\cdots(1)$ বা $3^x=3\cdots(2)$. (1) হইতে $3^x=3^2$, $\therefore$ $x=2$;

(2) হইতে $3=3^1$, $\therefore$ $x=1$. $\therefore$ $x=2$ বা 1.

উদা. 5. $a^{2x-3}=b^{2x-3}$.

$\because$ $a^{2x-3}=b^{2x-3}$, $\therefore$ $\frac{a^{2x-3}}{b^{2x-3}}=1$ বা $\left(\frac{a}{b}\right)^{2x-3}=1=\left(\frac{a}{b}\right)^0$ [$\because$ $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$]

$\therefore$ $2x-3=0$, $\therefore$ $x=\frac{3}{2}$.

উদা. 6. $\left.\begin{array}{l} 3^x.9^y=27^z\cdots(1) \\ 4^x.8^y=32^z\cdots(2) \\ 2^x.5^y.7^z=70\cdots(3) \end{array}\right\}$ [C. U. '43]

(1) হইতে পাই $3^x.3^{2y}=3^{3z}$, বা, $3^{x+2y}=3^{3z}$,

$\therefore$ $x+2y=3z$, বা, $x+2y-3z=0\ldots(4)$

(2) হইতে পাই $2^{2x}.2^{3y}=2^{5z}$, বা, $2^{2x+3y}=2^{5z}$,

$\therefore$ $2x+3y=5z$, বা, $2x+3y-5z=0\ldots(5)$

এক্ষণে, (4) ও (5) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই,

$$\frac{x}{-10+9}=\frac{y}{-6+5}=\frac{z}{3-4}, \text{ বা, } \frac{x}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1},$$

বা, $x=y=z=k$ (মনে কর)।

এক্ষণে, (3) হইতে পাই $2^k.5^k.7^k=70$,

বা, $(2.5.7)^k=70$, বা, $70^k=70^1$, $\therefore$ $k=1$.

অতএব, $x=y=z=1$.

উদা. 7. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-2=0$. [C. U. '30]

$x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-2=0$, বা, $(x^{\frac{1}{3}})^2+x^{\frac{1}{3}}-2=0$,

বা, $a^2+a-2=0$ [$x^{\frac{1}{3}}=a$ ধরিয়া], বা, $(a-1)(a+2)=0$,

$\therefore$ হয় $a-1=0$ অথবা $a+2=0$, $\therefore$ $a=1$ বা -2,

যদি $a=1$ হয়, তবে $x^{\frac{1}{3}}=1$, $\therefore$ $x=1$.

আবার, যদি $a=-2$ হয়, তবে, $x^{\frac{1}{3}}=-2$. $\therefore$ $x=-8$.

$\therefore$ $x=1$ বা -8.

উদা. 8. $5^x+5^{-x}=25\frac{1}{25}$.

এখানে $5^x+\frac{1}{5^x}=25+\frac{1}{25}$, বা, $5^x+\frac{1}{5^x}=5^2+\frac{1}{5^2}$,

বা, $5^x-5^2-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^x}=0$, বা, $(5^x-5^2)-\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^x}\right)=0$,

বা, $(5^x-5^2)-\left(\frac{5^x-5^2}{5^2.5^x}\right)=0$, বা, $(5^x-5^2)\left(1-\frac{1}{5^2.5^x}\right)=0$.

$\therefore$ হয় $5^x-5^2=0\ldots(1)$, অথবা $1-\frac{1}{5^2.5^x}=0\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $5^x=5^2$, $\therefore$ $x=2$;

এবং (2) " " $\frac{1}{5^x.5^2}=1$, বা, $\frac{1}{5^x}=5^2=\frac{1}{5^{-2}}$ $\therefore$ $x=-2$.

$\therefore$ $x=2$ বা -2.

করণী সংক্রান্ত সমীকরণ (Irrational Equations)

নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান কর :

উদা. 1. $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4$. [C. U. '47]

$\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4$, বা, $\sqrt{x+6}=4-\sqrt{x-2}$.

বা, $x+6=16+x-2-8\sqrt{x-2}$ [উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া]

বা, $8\sqrt{x-2}=16-2-6=8$, বা, $\sqrt{x-2}=1$, $\therefore\ x-2=1$.
$\therefore\ x=3$.

উদা. 2. $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}=5$.

এখানে যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই,

$$\frac{2\sqrt{a^2+x^2}}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{5+1}{5-1},\ \text{বা,}\ \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2},$$

বা, $\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}=\dfrac{9}{4}$ [বর্গ করিয়া], বা, $\dfrac{2a^2}{2x^2}=\dfrac{13}{5}$

[যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\dfrac{a^2}{x^2}=\dfrac{13}{5}$, বা, $13x^2=5a^2$, বা, $x^2=\dfrac{5}{13}a^2$. $\therefore\ x=\pm a\sqrt{\tfrac{5}{13}}$

উদা. 3. $2-\sqrt{11x^2+5x+3}=x$.

বা, $\sqrt{11x^2+5x+3}=2-x$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $11x^2+5x+3=x^2-4x+4$ [বর্গ করিয়া]

বা, $10x^2+9x-1=0$, বা, $10x^2+10x-x-1=0$,

বা, $(10x-1)(x+1)=0$, $\therefore$ হয় $10x-1=0$ অথবা $x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{10}$ বা, -1.

উদা. 4. $\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}$.

$\because\ ax-1=(\sqrt{ax})^2-(1)^2=(\sqrt{ax}+1)(\sqrt{ax}-1)$,

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই. $\dfrac{(\sqrt{ax}+1)(\sqrt{ax}-1)}{\sqrt{ax}+1}=4+\dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}$

বা, $(\sqrt{ax}-1)=4+\dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}$, বা, $(\sqrt{ax}-1)-\dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}=4$,

বা, $\dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}=4$, বা, $\sqrt{ax}-1=8$, বা, $\sqrt{ax}=9$. $\therefore\ ax=81$.

$\therefore\ x=\dfrac{81}{a}$.

উদা. 5. $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=4+\sqrt{34}$. [C. U. '27]

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই,

$$x^2+9+x^2-9+2\sqrt{x^4-81}=16+34+8\sqrt{34},$$

বা, $2x^2+2\sqrt{x^4-81}=50+8\sqrt{34}$.

এখন, করণীর নিয়ম অনুসারে উভয়পক্ষের মূলদ রাশিদ্বয় সমান,

$\therefore\ 2x^2=50,$ বা, $x^2=25,\ \therefore\ x=\pm 5.$

উদা. 6. $\sqrt{3x^2+16}-\sqrt{3x^2-16}=8-4\sqrt{2}\cdots(1)$

[অন্য প্রণালী] $(3x^2+16)-(3x^2-16)=32$ [অভেদে]

অর্থাৎ $(\sqrt{3x^2+16})^2-(\sqrt{3x^2-16})^2=32\cdots(2)$

$(2)\div(1)$ করিয়া পাই $\sqrt{3x^2+16}+\sqrt{3x^2-16}=\dfrac{32}{8-4\sqrt{2}}$

বা, $\sqrt{3x^2+16}+\sqrt{3x^2-16}=\dfrac{32(8+4\sqrt{2})}{(8)^2-(4\sqrt{2})^2}=\dfrac{32(8+4\sqrt{2})}{32}$

$=8+4\sqrt{2}\cdots(3)$

এখন $(1)+(3)$ করিয়া পাই $2\sqrt{3x^2+16}=16,$ বা, $\sqrt{3x^2+16}=8,$

$\therefore\ 3x^2+16=64,$ বা, $x^2=16,\ \therefore\ x=\pm 4.$

উদা. 7. $4x^2+6x+\sqrt{2x^2+3x+4}=13.$ [W.B.S.F. '53]

বা, $4x^2+6x+8+\sqrt{2x^2+3x+4}=21$ [উভয়পক্ষে 8 যোগ করিয়া]

বা, $2(2x^2+3x+4)+\sqrt{2x^2+3x+4}=21$

বা, $2a+\sqrt{a}=21$ [মনে কর, $a=2x^2+3x+4$]

বা, $2a-21=-\sqrt{a},$ বা, $4a^2-84a+441=a$ (বর্গ করিয়া)

বা, $4a^2-85a+441=0,$ বা, $4a^2-36a-49a+441=0.$

বা, $(a-9)(4a-49)=0,\ \therefore\ a=9,$ অথবা, $\frac{49}{4}$

একণে, যদি $a=9$ হয়, তবে $2x^2+3x+4=9,$

বা, $2x^2+3x-5=0,$ বা, $(x-1)(2x+5)=0,$

$\therefore\ x=1$ বা, $-\frac{5}{2}.$

আবার, $a=\frac{49}{4}$ হইলে, $2x^2+3x+4=\frac{49}{4}$ হয়,

বা, $8x^2+12x+16=49,$ বা, $8x^2+12x-33=0.$

$\therefore\ x=\dfrac{-12\pm\sqrt{144+1056}}{16}=\dfrac{-12\pm 20\sqrt{3}}{16}=\dfrac{-3\pm 5\sqrt{3}}{4}$

অতএব, $x=1,\ -\frac{5}{2},$ বা, $\dfrac{-3\pm 5\sqrt{3}}{4}.$

এখানে দেখা যায় যে, $x=1$ ও $x=-\frac{5}{2}$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কিন্তু $x=\dfrac{-3\pm 5\sqrt{3}}{4}$ দ্বারা উহা সিদ্ধ হয় না, ইহারা অবান্তর বীজ।

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ হইল $x=1$ বা, $-\frac{5}{2}.$

[$x=\frac{-3\pm5\sqrt{3}}{4}$কে প্রদত্ত সমীকরণের **অবান্তর বীজ** (extraneous roots) বলে। ঐ বীজ $4x^2+6x-\sqrt{2x^2+3x+4}=13$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, প্রদত্ত সমীকরণকে নহে।]

[**দ্রষ্টব্য :** উদা. 3 এবং উদা. 7এর ন্যায় যেক্ষেত্রে উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া সমীকরণ সমাধান করিতে হয়, সেক্ষেত্রে প্রাপ্ত সকল বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ না হইতে পারে। এরূপ স্থলে প্রাপ্ত কোন্ কোন্ বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় তাহা দেখিয়া লইয়া তবে উত্তর লিখিবে। এরূপ দেখিবার সময় বর্গমূল ধনাত্মক ধরিতে হইবে। অবান্তর বীজ থাকিলে উত্তরে উহা অবান্তর বীজ বলিয়া লিখিয়া দিবে।]

Exercise 12

সমাধান কর :—

1. $\sqrt{5x-1}=1+\sqrt{5x-2}$. [C. U.]
2. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}=\sqrt{6x+1}$ [C. U. '20 ; D. B. '30]
3. $x^2-2\sqrt{3}x-13=0$. [C. U. '46]
4. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}=12$.
5. $4^x+2^{x+2}=96$ [D. B. '47]
6. $\sqrt{a+x}+\sqrt{x}=\frac{ma}{\sqrt{a+x}}$. [P. U.]
7. $2(4^x-3.2^{x-1})+1=0$.
8. $x^{-3}+x^{-\frac{3}{2}}=2$.
9. $(\sqrt{2})^{3x+1}=256$.
10. $\left(\frac{p}{q}\right)^{-2}=\left(\frac{q}{p}\right)^{2x-1}$
11. $(\sqrt[3]{36})^{2x+1}=(\sqrt[5]{216})^{x+6}$.
12. $5^{x-2}+5^{1-x}=1\frac{1}{5}$.
13. $2^{x-2}+2^{3-x}=3$. [C. U. '40]
14. $2^{2x-2}=2^{x-3}-\frac{1}{64}$. [C. U. (D. M. H.) '51]
15. $12^x+12^{-x}=144\frac{1}{144}$.
16. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=5$. [C. U. '29, '41]
17. $a^{4x-6}=b^{4x-6}$.
18. $4^x-3.2^{x+2}+32=0$. [W. B. S. F. '53]
19. $x^2+2(b-c)x+c^2=2bc$.
20. $\sqrt{2x^2+9}+\sqrt{2x^2-9}=9+3\sqrt{7}$.
21. $3^{x+y}=3^{2x-y}=\sqrt{27}$.
22. $3.2^{x+1}=8+4^x$.

23. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5.$ [C. U. '46]

24. $\sqrt{x}+\sqrt{x-9}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$ [G. U. '50 ; Pat. U. '21]

25. $4^{\frac{x+3}{2}}.8^{\frac{x-3}{3}}=2^{\frac{5x+7}{3}}.16^{\frac{3x-1}{7}}.$ [D. B. '36]

26. $\sqrt{x^2+11x+20}-\sqrt{x^2+5x-1}=3.$ [C. U.]

27. $\sqrt{\dfrac{x-a}{x-b}}+\dfrac{a}{x}=\sqrt{\dfrac{x-b}{x-a}}+\dfrac{b}{x}.$ [M. U.]

28. $\sqrt{2x-9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}.$

29. $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=3+\dfrac{3-\sqrt{x}}{2}.$

30. $5^{x^2+x+1}.6^{x^2+x+2}=162000.$

31. $4\times 2^{x-1}=8^x.$ [D. B. '31]

32. $4^{x+\frac{1}{2}}+4=36(2^{x-2}).$ [W. B. S. F. '52]

33. $9(9^{x-1}+3)=28\times 3^x.$ 34. $6(x^4+1)=13x^2$ [D. B. '32]

35. $3x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{8}{x^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{10}{x^{\frac{1}{2}}}=0.$ [D. B. '35]

36. $a^x.a^{y+1}=a^7,\quad a^{2y}.a^{3x+5}=a^{20}.$ [C. U. 1878]

37. $(p+x)^{\frac{2}{3}}+(p-x)^{\frac{2}{3}}=3(p^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$

38. $(\sqrt{3})^{2x+4}=243$ [C. U. '50 ; G. U. '51]

39. $9^x=\dfrac{9}{3^x}$ [P. U. '30] 40. $2^{x+4}+2^{x+1}=144.$

41. $\sqrt{(x^2-2x+49)}-\sqrt{(x^2-2x+16)}=3.$

42. $2(x+2)=1+\sqrt{4x^2+9x+14}.$ [C. U.]

43. $\dfrac{x-ax}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ 44. $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}.$ [C. U.]

45. $x^2+\dfrac{36}{x^2}=13.$ 46. $(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}.$

[D. B. '46, '51 ; C. U.]

দ্বিঘাত সমীকরণ সংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্ন
(Problems on Quadratic Equations)
উদাহরণমালা 13

37 [**দ্রষ্টব্য :** দ্বিঘাত সমীকরণ সংক্রান্ত প্রশ্নগুলির সমাধানকালে অনেক সময় দেখা যায় যে, অজ্ঞাত রাশিটির প্রাপ্ত দুইটি মানই প্রশ্নের শর্ত পূরণ করে না। সুতরাং প্রত্যেক ফলটিকে পরীক্ষা করিয়া তবে উত্তররূপে গ্রহণ করিবে।].

উদা. 1. পর পর কোন্ দুইটি অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল 899 ? [P. U. '24]

মনে কর, $2x-1$ ও $2x+1$ পর পর দুইটি অযুগ্ম সংখ্যা,

∴ শর্তানুসারে, $(2x-1)(2x+1)=899$, বা, $4x^2-1=899$,

বা, $4x^2=900$, বা, $x^2=225$, ∴ $x=\pm 15$.

∴ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=29$ ও 31 ; অথবা, -31 ও -29.

[**দ্রষ্টব্য :** xএর অখণ্ড মানে $2x$ একটি যুগ্ম সংখ্যা,

∴ $2x+1$, বা, $2x-1$ অযুগ্ম সংখ্যা।]

উদা. 2. এক ব্যক্তি 20 টাকায় কতকগুলি পুস্তক কিনিল। সে যদি ঐ টাকায় আর একখানি পুস্তক বেশী পাইত, তবে প্রত্যেকখানির গড় মূল্য এক টাকা কম হইত। সে কতগুলি পুস্তক কিনিয়াছিল ?

মনে কর, পুস্তকের সংখ্যা x, সুতরাং প্রত্যেক পুস্তকের গড়মূল্য $\frac{20}{x}$ টাকা। যদি 20 টাকায় $x+1$ সংখ্যক পুস্তক কেনা হইত, তবে ঐ গড়মূল্য হইত $\frac{20}{x+1}$ টাকা।

∴ শর্তানুসারে, $\frac{20}{x+1}=\frac{20}{x}-1$, বা, $\frac{20}{x+1}=\frac{20-x}{x}$,

বা, $20x=20x+20-x^2-x$, বা, $x^2+x-20=0$,

বা, $(x+5)(x-4)=0$, ∴ $x=-5$ বা, 4.

নির্ণেয় পুস্তকের সংখ্যা $=4$.

এখানে যেহেতু পুস্তকের সংখ্যা ঋণাত্মক হইতে পারে না, সেইজন্য xএর মান -5 গ্রাহ্য হইল না।

উদা. 3. 50কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন তাহাদের অন্যোন্যকের সমষ্টি $\frac{1}{12}$ হয়।

মনে কর, প্রথম অংশ x, সুতরাং দ্বিতীয় অংশ $=50-x$.

∴ শর্তানুসারে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{50-x}=\frac{1}{12}$, বা, $\frac{50-x+x}{x(50-x)}=\frac{1}{12}$,

বা, $\frac{50}{50x-x^2}=\frac{1}{12}$, বা, $600=50x-x^2$,

বা, $x^2-50x+600=0$, বা, $x^2-30x-20x+600=0$.

বা, $(x-20)(x-30)=0$, $\therefore$ $x=20$ বা, 30.

$\therefore$ নির্ণেয় অংশদ্বয় = 20 ও 30.

[**দ্রষ্টব্য :** দুইটি সংখ্যার গুণফল 1 হইলে একটিকে অপরটির **অন্যোন্যক** (reciprocal) বলে। যথা, $\frac{3}{4}$এর অন্যোন্যক $\frac{4}{3}$, 5এর অন্যোন্যক $\frac{1}{5}$ ইত্যাদি।]

উদা. 4. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 20 ইঞ্চি এবং অপর দুই বাহুর অন্তর 4 ইঞ্চি। ঐ বাহু দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর, ক্ষুদ্রতর বাহু $=x$ ইঞ্চি, সুতরাং বৃহত্তর বাহুটি $=x+4$ ইঞ্চি।

$\therefore$ $x^2+(x+4)^2=20^2$, বা, $x^2+x^2+8x+16=400$,

বা, $2x^2+8x-384=0$, বা, $x^2+4x-192=0$,

বা, $(x+16)(x-12)=0$, $\therefore$ $x=-16$ বা, 12, $\because$ বাহু ঋণাত্মক নহে,

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর বাহুটি = 12 ইঞ্চি এবং বৃহত্তর বাহুটি = (12+4) ই. = 16 ইঞ্চি।

উদা. 5. একজন সাইকেল আরোহী 84 কি.মি. ভ্রমণ করিয়া দেখিল যে ঘণ্টায় আরও 5 কি.মি. অধিক বেগে যাইলে তাহার 5 ঘণ্টা কম সময় লাগিত। সে কত বেগে গিয়াছিল ?

মনে কর, লোকটির গতি ঘণ্টায় x কি. মিটার। $\therefore$ 84 কি.মি. যাইতে সময় লাগে $\frac{84}{x}$ ঘণ্টা। গতি ঘণ্টায় $(x+5)$ কি.মি. হইলে 84 কি.মি. যাইতে লাগে $\frac{84}{x+5}$ ঘণ্টা।

$\therefore$ $\frac{84}{x}-\frac{84}{x+5}=5$, বা, $\frac{84x+420-84x}{x(x+5)}=5$, বা, $\frac{420}{x^2+5x}=5$,

বা, $5(x^2+5x)=420$, বা, $x^2+5x=84$, বা, $x^2+5x-84=0$,

বা, $(x+12)(x-7)=0$, $\therefore$ $x=-12$ বা, 7.

$\because$ গতি ঋণাত্মক হইতে পারে না, $\therefore$ নির্ণেয় গতি ঘণ্টায় 7 কি. মিটার।

উদা. 6. কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে একটি জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্বটি জ্যা-এর অর্ধেক অপেক্ষা 3 ইঞ্চি কম। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 15 ইঞ্চি হইলে, জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত ?

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। মনে কর, AB জ্যা-এর উপর কেন্দ্র O হইতে OD লম্ব টানা হইয়াছে। এক্ষণে, ODA একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

মনে কর, OD $=x$ ইঞ্চি, সুতরাং AD $=x+3$ ইঞ্চি এবং অতিভুজ OA = 15 ই.

$\because$ $OD^2+AD^2=OA^2$, $\therefore$ $x^2+(x+3)^2=15^2$,

বা, $2x^2+6x+9=225$, বা, $2x^2+6x-216=0$,

বা, $x^2+3x-108=0$, বা, $(x+12)(x-9)=0$, $\therefore$ $x=-12$ বা, 9.

$\because$ দৈর্ঘ্যের মাপ ঋণাত্মক হইতে পারে না, $\therefore$ লম্বটি = 9 ইঞ্চি।

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=2(x+3)$ ই. $=2(9+3)$ ইঞ্চি = 24 ইঞ্চি।

উদা. 7. একজন মাঝি $4\frac{2}{3}$ ঘণ্টায় 7 কি. মিটার নৌকায় যাতায়াত করিতে পারে। যদি স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 2 কি.মি. হয়, তবে স্থির জলে নৌকার বেগ কত? [D. B. '17]

মনে কর, দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় x কি.মি.। $\therefore$ স্রোতের অনুকূলে নৌকার গতি ঘণ্টায় $x+2$ কি.মি. এবং প্রতিকূলে ঘণ্টায় $x-2$ কি. মিটার।

$\therefore \frac{7}{x+2}+\frac{7}{x-2}=4\frac{2}{3}$, বা, $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{3}$

[উভয় পক্ষকে 7 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $\frac{x-2+x+2}{x^2-4}=\frac{2}{3}$, বা, $x^2-3x-4=0$,

বা, $(x-4)(x+1)=0$, $\therefore$ $x=4$ বা, -1.

$\because$ দাঁড়ের বেগ -1 হইতে পারে না, $\therefore$ নির্ণেয় বেগ = ঘণ্টায় 4 কি. মিটার।

Exercise 13

1. কোন সংখ্যার বর্গ উহার ত্রিঘাতের সহিত যোগ করিলে উহার পরবর্তী সংখ্যার 16 গুণ হইবে? [A. U. '16]

2. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 2 এবং উহাদের অন্যোন্যকদ্বয়ের সমষ্টি $2\frac{1}{4}$; সংখ্যা দুইটি কত? [C. U. '35]

3. পর পর কোন্ দুইটি অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল 35?

4. পর পর কোন্ দুইটি সংখ্যার অন্যোন্যকদ্বয়ের অন্তর $\frac{1}{110}$?

5. কোন্ সংখ্যা 30এর সহিত যোগ করিলে যোগফল সংখ্যাটির বর্গ অপেক্ষা 12 কম হইবে? [E. B. S. B. '50]

6. পর পর দুইটি অযুগ্ম সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 290; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

7. কোন্ সংখ্যা তাহার বর্গমূল অপেক্ষা 110 বেশী?

8. দুইটি পর পর যুগ্ম সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 100; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [A. U. '24]

9. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 17″ এবং অপর দুইটি বাহুর সমষ্টি 23″; ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য কত? [G. U. '51]

10. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 13 সে. মি. এবং অন্য বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 17 সে. মি.; ঐ বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

11. A ও B একত্রে একটি কাজ 72 মিনিটে করিতে পারে; কিন্তু A অপেক্ষা Bএর ঐ কাজ করিতে এক ঘণ্টা বেশী সময় লাগে। প্রত্যেকে কতক্ষণে ঐ কাজটি করিতে পারে?

12. এক শিলিং-এ আরও দুইটি ডিম বেশী পাইলে যদি এক ডজন ডিমের মূল্য বর্তমান মূল্য অপেক্ষা 1 পেনি কম পড়ে, তবে এক ডজন ডিমের বর্তমান মূল্য কত? [E. B. S. B. '51]

13. এক ব্যক্তি 420 টাকায় কতকগুলি ছাগল কিনিয়া দেখিল যে, সে ঐ টাকায় আর একটি ছাগল বেশী পাইলে প্রত্যেকটির মূল্য গড়ে এক টাকা কম হইত। সে কতগুলি ছাগল কিনিয়াছিল ?

14. একটি সংখ্যা তাহার অঙ্কদ্বয়ের গুণফলের দ্বিগুণ অপেক্ষা 8 কম। যদি এককের অঙ্ক অপেক্ষা দশকের অঙ্ক 1 বেশী হয়, তবে সংখ্যাটি কত ?

15. এক ব্যক্তির গতিবেগ ঘণ্টায় 2 কি. মি. বেশী হইলে 24 কি. মি. যাইতে তাহার 1 ঘণ্টা কম সময় লাগে। ঘণ্টায় তাহার গতিবেগ কত ?

16. একটি বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যা-এর উপর লম্বটি অর্ধজ্যা অপেক্ষা 1″ কম। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5″ হইলে, ঐ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত ?

17. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 260 বর্গ সে. মি.। উহার দৈর্ঘ্য 5 সে. মি. কম এবং প্রস্থ 2 সে.মি. বেশী হইলে উহা একটি বর্গক্ষেত্র হইত। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

18. একটি মাঝি কোন সময়ে স্রোতের অনুকূলে 9 কি. মি. কিন্তু স্রোতের প্রতিকূলে 3 কি. মি. নৌকা বাহিয়া যায়। স্রোতের গতিবেগ ঘণ্টায় 2 কি. মি. হইলে, স্থির জলে নৌকার বেগ কত ?

19. পর পর কোন্ দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 761 ? [G. U. '52]

20. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 25″ এবং উহার পরিসীমা 56″; ক্ষুদ্রতম বাহুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [G. U. '54]

21. পর পর কোন্ সংখ্যাদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি 145 ? [C. U. '16]

22. 1কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন উহাদের ত্রিঘাতের সমষ্টি $\frac{7}{16}$ হয়।

23. কোন্ প্রকৃত ভগ্নাংশ ও তাহার অন্যোন্যকের অন্তর $\frac{9}{20}$? [C. U. '41]

24. কোন্ দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 45 এবং উহাদের মধ্যসমানুপাতিক 18 ?

25. কোন্ সংখ্যা তাহার অন্যোন্যক অপেক্ষা 1 বেশী। এরূপ কয়টি সংখ্যা হইতে পারে ? সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [C. U. '34]

26. প্রমাণ কর যে, চারিটি ক্রমিক সংখ্যার গুণফলের সহিত 1 যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

27. 6 আনায় একটি ডিম বেশী পাইলে যদি এক ডজন ডিমের মূল্য 1 আনা কম পড়ে, তবে এখন এক ডজন ডিমের মূল্য কত ? [D. B. '39, '41, '46]

28. এরূপ একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর যাহার লব ও হরে 2 অথবা 3 যোগ করিলে ভগ্নাংশটির মান যথাক্রমে পূর্বমানের 2 গুণ বা 3 গুণ হইবে। [D. B. '49]

29. কোন সৈন্যদলকে 4 গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইলে সম্মুখ সারিতে যত সৈন্য থাকে, তাহাদিগকে পূর্ণবর্গাকারে সাজাইলে সম্মুখসারিতে তদপেক্ষা 16 জন কম থাকে। সৈন্যসংখ্যা নির্ণয় কর। [D. B. '40]

30. এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ভগ্নাংশের লব ও হরের যোগফল 10 এবং ঐ ভগ্নাংশ ও উহার অন্যোন্যকের বিয়োগফল $\frac{40}{21}$; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [H. S. '62]

লেখ (Graph)

পূর্বে তোমরা **লেখ** অঙ্কন করিতে শিখিয়াছ। তোমরা জান যে একঘাত-বিশিষ্ট সমীকরণের অর্থাৎ সরল সমীকরণের লেখ **সরল রেখা** হয়।

আর যদি কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দ্বিঘাত রাশিকে দুইটি সরল উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, তাহা হইলে প্রদত্ত সমীকরণের লেখ **দুইটি সরল রেখা** হইয়া থাকে।

যথা,—(i) $x^2-x-6=0$, বা, $(x-3)(x+2)=0$, এই সমীকরণ হইতে পাই $x-3=0$, বা, $x+2=0$; সুতরাং $x-3=0$ এবং $x+2=0$ এই সমীকরণ দুইটির লেখ দুইটিই প্রদত্ত $x^2-x-6=0$ সমীকরণের লেখ হইবে।

(ii) $x^2=9y^2$, বা $x^2-9y^2=0$, বা, $(x+3y)(x-3y)=0$.

অতএব, $x+3y=0$ এবং $x-3y=0$ এই সমীকরণদ্বয়ের লেখ দুইটিই এখানে $x^2=9y^2$ এর লেখ।

[**দ্রষ্টব্য :** লেখ অঙ্কনের সময় লেখ কাগজে অক্ষদ্বয়, মূল বিন্দু এবং দৈর্ঘ্য একক কি ধরা হইয়াছে তাহা লিখিতে হয়। প্রদত্ত সমাধানগুলিতে সর্বত্র ঐগুলি লেখা না থাকিলেও তোমরা উত্তর করিবার সময় ঐগুলি লিখিতে যেন ভুলিও না।]

নিম্নে দ্বিঘাত সমীকরণের লেখ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

বৃত্ত (Circle)

38. দ্বিঘাত সমীকরণে x^2 ও y^2এর সহগ সমান ও ধনাত্মক হইলে এবং xy ঘটিত কোন পদ না থাকিলে সমীকরণটির লেখ **বৃত্ত** (circle) হইবে। এইরূপ সমীকরণের আকার নিম্নের তিন প্রকার হইতে পারে :

(1) $x^2+y^2=a^2$ (2) $(x+b)^2+(y+c)^2=a^2$

(3) $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

যথা :—(1) $x^2+y^2=16$ (2) $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

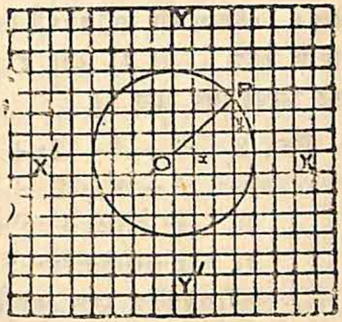
(3) $x^2+y^2+12x+18y+92=0$.

উদাহরণমালা 14

উদা. 1. $x^2+y^2=16$ সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর।

প্রদত্ত সমীকরণকে $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16}=4$ এই আকারে লেখা যায়।

মনে কর, XOX′ ও YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পর O মূল-বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। মনে কর, P এমন একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (x, y) এখন মূলবিন্দু O হইতে P এর দূরত্ব OP.



চিত্র নং 1

সুতরাং $OP^2 = x^2 + y^2$,

$\therefore \quad OP = \sqrt{x^2+y^2}$,

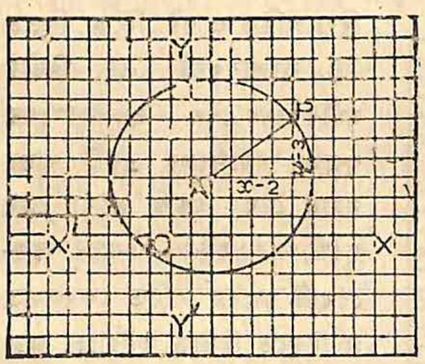
$\because$ এখানে $\sqrt{x^2+y^2} = 4$ (ধ্রুবক),

$\therefore$ বুঝা গেল যে, মূলবিন্দু O হইতে P এর দূরত্ব সর্বদা 4 এককের সমান। অতএব, P এর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

$\therefore$ O কে কেন্দ্র করিয়া এবং 4 একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট লেখ হইবে।

এখানে লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি অঙ্কিত করা হইল।

[**অন্য প্রণালী :** $\because \; x^2+y^2=16. \quad \therefore \; y = \pm\sqrt{16-x^2}$, এই সমীকরণ হইতে লেখস্থিত বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিয়া ও বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে স্থাপন করিয়া লেখটি অঙ্কিত করা যায়।]



চিত্র নং 2

উদা. 2. $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ এর লেখ অঙ্কিত কর।

প্রদত্ত সমীকরণটি হইতে পাই,

$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$

প্রথমে (2, 3) স্থানাঙ্ক-বিশিষ্ট A বিন্দু স্থাপন কর। মনে কর, P উদ্দিষ্ট লেখের উপর একটি বিন্দু এবং উহার স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore \quad AP^2 = (x-2)^2+(y-3)^2$,

$\therefore \quad AP = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 5$ (ধ্রুবক)।

অতএব, বুঝা গেল যে, P বিন্দু ঐ নির্দিষ্ট A বিন্দু হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী অর্থাৎ 5 একক দূরবর্তী।

$\therefore$ A (2, 3) বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া 5 একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট লেখ। এখানে লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি আঁকা হইল। অক্ষদ্বয় XOX′ ও YOY′.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে লক্ষ্য কর যে, প্রদত্ত সমীকরণে $(x-2)^2$, $(y-3)^2$ আছে বলিয়া A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3) অর্থাৎ −2 ও −3এর বিপরীত চিহ্নযুক্ত ধরা হইল। এইরূপে যদি সমীকরণটি $(x+3)^2+(y-4)^2=36$ হইত, তবে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইত (−3, 4) এবং ইহাকে কেন্দ্র করিয়া 6 একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় লেখ হইত।]

উদা. 3. $x^2+y^2+12x+18y+92=0$, ইহার লেখ অঙ্কিত কর।

$$x^2+y^2+12x+18y+92=0,$$

বা, $(x^2+12x+36)+(y^2+18y+81)-25=0.$

বা, $(x+6)^2+(y+9)^2=25=5^2.$

∴ সমীকরণটির লেখ একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (−6, −9) এবং ব্যাসার্ধ=5 দৈর্ঘ্য একক। অক্ষদ্বয় লও এবং লেখ-কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য-একক ধরিয়া বৃত্তটি আঁক।

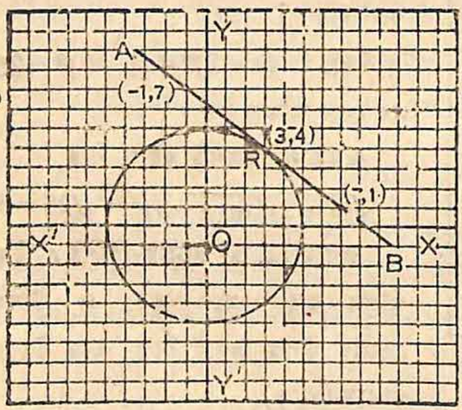
উদা. 4. $x^2+y^2=25$, ইহার লেখ আঁকিয়া দেখাও যে, $3x+4y=25$ সরলরেখা উহাকে (3, 4) বিন্দুতে স্পর্শ করে। [C. U. '11 ; E.B.S.B '50]

প্রথম সমীকরণের লেখ একটি বৃত্ত, উদা. 1এর মত উহা আঁক [চিত্র নং 3]

$3x+4y=25$, হইতে

x	3	7	−1
y	4	1	7

; (3, 4), (7, 1), (−1, 7) বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত ও দুই দিকে বিস্তৃত AB সরলরেখাটি এই দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক লইয়া লেখ দুইটি আঁকা হইল। এখানে সরলরেখাটি বৃত্তটির সহিত কেবলমাত্র R বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, অন্য কোন বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে নাই। সুতরাং উহা বৃত্তকে R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে এবং ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4).



চিত্র নং 3

[**জ্যামিতিক প্রমাণ :** ∵ দুইটি সমীকরণই (3, 4) স্থানাঙ্ক দ্বারা সমাধান হয়, ∴ উভয় লেখই (3, 4) বিন্দুতে মিলিয়াছে। এখন যদি RO হইতে RC=3 একক এবং RA হইতে RD=4 একক কাটিয়া লই, তবে মাপিয়া দেখা যাইবে CDর দৈর্ঘ্য 5 একক হইয়াছে। ∵ $RC^2+RD^2=3^3+4^2=25$

$=5^2=CD^2$, ∴ ∠R সমকোণ। অতএব, AB রেখা বৃত্তের OR ব্যাসার্ধের R বিন্দুতে লম্ব বলিয়া, উহা বৃত্তকে R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।]

39. অধিবৃত্ত (Parabola)

1. দ্বিঘাত সমীকরণে x ও yএর মধ্যে একটি দ্বিঘাত অপরটি একঘাত হইলে এবং xyযুক্ত কোন পদ না থাকিলে সমীকরণটির লেখ **অধিবৃত্ত** (Parabola) হইবে। এইরূপ সমীকরণের আকার (i) $y=ax^2$ বা, $ay=y^2$ হইয়া থাকে। (ii) $y=cx^2+bx+a$, বা, $x=cy^2+by+a$ এই আকারের সমীকরণের লেখ অধিবৃত্ত হইবে, যদি $c=0$ না হয়। যথা—

(1) $4y=x^2$, (2) $3x=y^2$, (3) $y=x^2+2x+1$.

2. $4x+2$, x^2, x^2-5x+6 প্রভৃতি **অপেক্ষক** (function)-এর লেখ যাহা হইবে যথাক্রমে $y=4x+2$, $y=x^2$, এবং $y=x^2-5x+6$ সমীকরণের লেখও তাহাই হইবে। অতএব, এইরূপ কোন অপেক্ষকের লেখ আঁকিতে হইলে $y=$ ঐ অপেক্ষকটি লিখিয়া সেই সমীকরণের লেখ আঁকিবে।

উদাহরণমালা 15

উদা. 1. (*a*) $y=x^2$ সমীকরণের লেখ অঙ্কন কর।

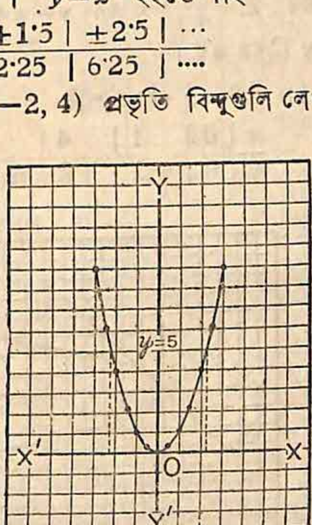
(*b*) $x=3$ হইতে $x=-3$ এই সীমার মধ্যে $y=x^2$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং সেই লেখ হইতে প্রথম দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত $\sqrt{5}$এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '38]

এখানে (*b*)এর সমাধানই দেখান হইতেছে।

প্রদত্ত সমীকরণটির লেখ একটি অধিবৃত্ত হইবে। $y=x^2$ হইতে পাই

x	0	±1	±2	±3	±·5	±1·5	±2·5	…
y	0	1	4	9	·25	2·25	6·25	....

এখানে (0, 0), (1, 1), (−1, 1), (2, 4) (−2, 4) প্রভৃতি বিন্দুগুলি লেখটির উপর থাকিবে। মনে কর, XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় O মূলবিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক লইয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন কর। তারপর উহাদিগকে হস্তাঙ্কিত মসৃণ রেখা দ্বারা যোগ কর। ইহাতে যে অধিবৃত্তটি উৎপন্ন হইল তাহাই উদ্দিষ্ট লেখ। এখানে লেখটি $x=3$ ও $x=-3$ এই সীমার মধ্যে অঙ্কিত হইয়াছে।



চিত্র নং 4

এখন এই লেখ হইতে $\sqrt{5}$এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। লেখটির উপরিস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইতে দেখা যাইতেছে যে, xএর

মান yএর মানের বর্গমূল। সুতরাং yএর মান 5 হইলে তখন xএর মান যাহা হইবে তাহাই $\sqrt{5}$এর মান। লেখটিতে দেখা যায় যে, $y=5$ হইলে xএর মান $\pm 2{\cdot}2$ হয়।

অতএব, $\sqrt{5}=\pm 2{\cdot}2$ (প্রায়)।

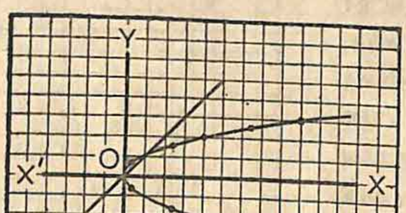
[**দ্রষ্টব্য :** উপরের লেখ হইতে দেখা যায় যে, (1) y-এর প্রত্যেক মানের জন্য xএর মান দুইটি হইতেছে। ঐ মান দুইটি সমান, কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। সুতরাং লেখটির Y-axis-এর দুই দিকে প্রতিসাম্য রহিয়াছে। (2) xএর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, y-এর মান সর্বদাই ধনাত্মক, সুতরাং কোটিগুলি (ordinates) সবই X-axis-এর উপরের দিকে অবস্থিত। অতএব লেখটির কোন অংশ X-axis-এর নীচের দিকে থাকিতে পারে না। (3) লেখটি মূলবিন্দুগামী। (4) প্রশ্নে কোনরূপ সীমা নির্দেশ করা না থাকিলে লেখটি উপরের দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে। সুতরাং অঙ্কিত চিত্রে শেষ বিন্দুদ্বয়ের পর লেখটি সামান্য একটু করিয়া বাড়াইয়া দিবে। এখানে অঙ্কিত লেখটিতে ঐরূপ বর্ধিত করা হয় নাই ; কারণ, এখানে $x=3$ এবং $x=-3$, এই সীমা নির্দেশ করা আছে। (5) অধিবৃত্ত আঁকিবার সময় অন্তত: ছয়টি বিন্দু সংস্থাপন করা উচিত। সমীকরণে যে অক্ষরটির দ্বিঘাত আছে, তাহার মান প্রথমে ধরিয়া অপরটির মান তাহা হইতে নির্ণয় করিবে। স্থাপিত বিন্দুগুলির পাশে স্থানাঙ্ক লিখিবে।]

উদা. 2. $y^2=x$ এবং $y=x$এর লেখ অঙ্কিত করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [G. U. '50]

(1) $y^2=x$ হইতে পাই

x	0	1	4	9	·25	2·25	…
y	0	± 1	± 2	± 3	$\pm{\cdot}5$	$\pm 1{\cdot}5$	…

এবং



চিত্র নং 5

(2) $y=x$ হইতে পাই

x	0	2	-3	….
y	0	2	-3	…

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখ দুইটি অঙ্কিত করা হইল। প্রথম লেখটি অধিবৃত্ত, দ্বিতীয়টি সরলরেখা। উহারা যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের স্থানাঙ্ক (0, 0) এবং (1, 1).

39.1. লেখ দ্বারা সমীকরণ সমাধান

লেখ অঙ্কিত করিয়া কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয় (অর্থাৎ সমাধান) করিতে হইলে, উহাকে দুইটি সমীকরণে প্রকাশ করিয়া প্রত্যেকটির লেখ আঁকিতে হইবে। ঐ লেখ দুইটির ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজদ্বয়ই দুইটি বীজ হইবে। যথা— $x^2-7x+12=0$এর সমাধান করিবার জন্য নিম্নের যে কোন উপায় অবলম্বন করা যায়। যথা, (1) $y=x^2-7x+12$ ও $y=0$ ধরিয়া; অথবা (2) প্রদত্ত সমীকরণকে $x^2=7x-12$ লিখিয়া $y=x^2$ ও $y=7x-12$ ধরা যায়। এখন (1) বা (2)-এর সমীকরণদ্বয়ের লেখ আঁকিয়া, লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দু দুইটির ভুজ দুইটিই সমীকরণের বীজ অর্থাৎ xএর মান হইবে।

উদা. 1. লেখ সাহায্যে $2x^2-x-2=0$ সমীকরণটি সমাধান কর। [A.U.'15]

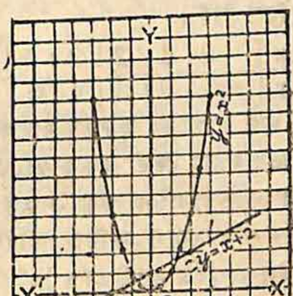
$$2x^2-x-2=0, \quad \text{বা,} \quad 2x^2=x+2, \quad \therefore \quad x^2=\frac{x+2}{2};$$

এখানে মনে কর, $x^2=y$...(1) ; সুতরাং $y=\dfrac{x+2}{2}$...(2).

এক্ষণে XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় ও ক্ষুদ্রতম বর্গের 1টি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া (1) ও (2) সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয় অঙ্কিত কর। প্রথম লেখটি অধিবৃত্ত, দ্বিতীয় লেখটি সরলরেখা যাহা (0, 1) (2, 2), (−2, 0)···বিন্দু দিয়া গিয়াছে। এখন লেখ দুইটি যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের ভুজদ্বয় 1·3, −·8 ;

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=1{\cdot}3$ ও $-{\cdot}8$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে $y=2x^2-x-2$ এবং $y=0$ লিখিয়া দুইটি লেখ আঁকিলেও হইত। $y=0$-র লেখ X-অক্ষ জানাই আছে। সুতরাং $y=2x^2-x-2$এর লেখটি X-অক্ষকে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিবে তাহাদের ভুজ হইবে 1·3, −·8.]



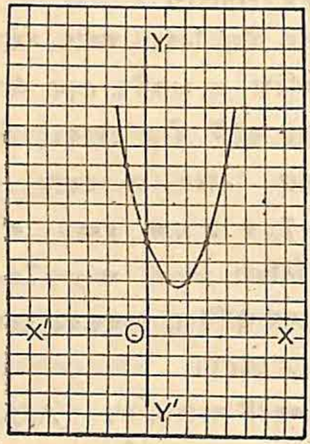
চিত্র নং 6

উদা. 2. লেখ সাহায্যে প্রমাণ কর যে, x-এর যে কোন বাস্তব মানের পক্ষে x^2-3x+4 অপেক্ষকটি সর্বদা ধনাত্মক হইবে। [C. U. '48]

এখানে x^2-3x+4 একটি অপেক্ষক। মনে কর, ইহা y-এর সমান।

∴ $y=x^2-3x+4$ এবং ইহার লেখ একটি অধিবৃত্ত। ইহা হইতে পাই

x	0	1	−1	2	3	4	...
y	4	2	8	2	4	8	...



চিত্র নং 7

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল, এবং সন্তত রেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া লেখটি আঁকা হইল।

লেখটি হইতে দেখা যাইতেছে যে, উহার কোন অংশ x-অক্ষের নীচে অর্থাৎ ঋণাত্মক দিকে আসে নাই, সুতরাং x-এর মান (যে কোন বাস্তব মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) যাহাই হউক না কেন, y-এর মান সর্বদা ধনাত্মক।

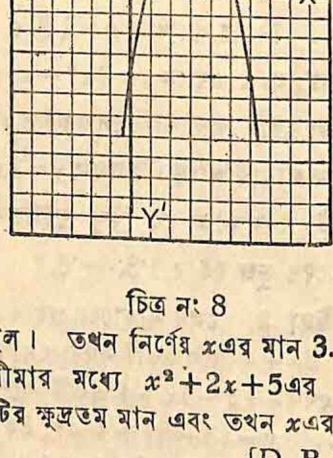
অতএব প্রমাণিত হইল যে x^2-3x+4এর মান সর্বদা ধনাত্মক।

উদা. 3. লেখ অঙ্কন করিয়া $6x-x^2-5$ অপেক্ষকটির বৃহত্তম মান নির্ণয় কর। xএর মান কত হইলে ঐ বৃহত্তম মান হয়? [M. U. '28 ; D. B. '31]

মনে কর, $y=6x-x^2-5$, ইহার লেখ একটি অধিবৃত্ত হইবে। ঐ সমীকরণ হইতে পাই।

x	0	1	2	3	5	6	···
y	−5	0	3	4	0	−5	···

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং সন্তত রেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া অধিবৃত্তটি আঁকা হইল [চিত্র নং 8 দেখ]।



চিত্র নং 8

এখন yএর চরম মানই প্রদত্ত অপেক্ষক $6x-x^2-5$এর চরম মান হইবে। লেখটিতে দেখা যায় যে, উহার কোন অংশ A বিন্দুর ঊর্ধ্বে উঠে নাই এবং ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4) বলিয়া উহার কোটি $=4$.

অতএব, $6x-x^2-5$এর বৃহত্তম মান 4 হইল। তখন নির্ণেয় xএর মান 3.

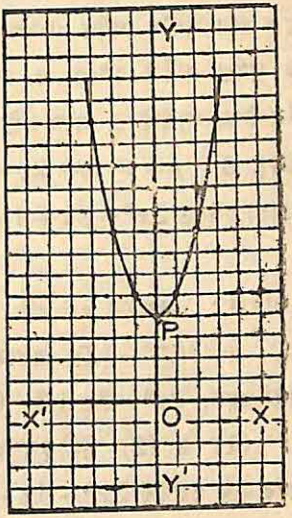
উদা. 4. $x=-4$ হইতে $x=2$ এই সীমার মধ্যে x^2+2x+5এর লেখ অঙ্কিত কর। সেই লেখ হইতে ঐ অপেক্ষকটির ক্ষুদ্রতম মান এবং তখন xএর মান কত নির্ণয় কর। [D. B '32]

মনে কর, প্রদত্ত অপেক্ষকটি $=y$, সুতরাং $y=x^2+2x+5$, ইহার লেখ একটি অধিবৃত্ত হইবে।

সমীকরণটি হইতে পাই

x	0	1	−1	2	−2	−3	−4	....
y	5	8	4	13	5	8	13	...

XOX′ ও YOY′ অক্ষদ্বয় লইয়া এবং ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। বিন্দুগুলিকে হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিলে যে অধিবৃত্ত হইল উহাই উদ্দিষ্ট লেখ [চিত্র নং 9 দেখ]।



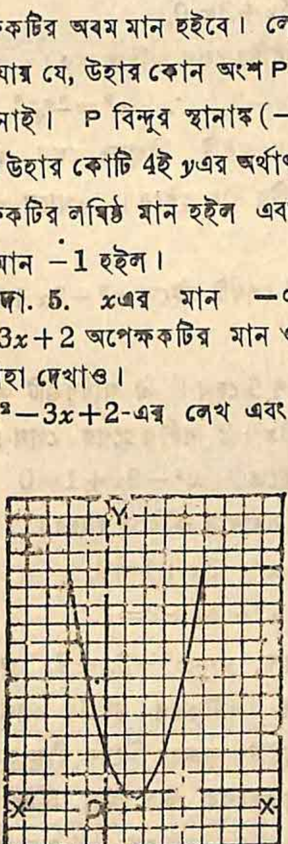
চিত্র নং 9

yএর অবম বা লঘিষ্ঠ মানই প্রদত্ত অপেক্ষকটির অবম মান হইবে। লেখটিতে দেখা যায় যে, উহার কোন অংশ P বিন্দুর নীচে নাই। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 4)$ বলিয়া উহার কোটি 4ই yএর অর্থাৎ প্রদত্ত অপেক্ষকটির লঘিষ্ঠ মান হইল এবং তখন xএর মান -1 হইল।

উদা. 5. xএর মান $-\infty$ হইতে $+\infty$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে x^2-3x+2 অপেক্ষকটির মান ও চিহ্নের (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) কিরূপ পরিবর্তন হয় তাহা দেখাও। [C. U. '49]

x^2-3x+2-এর লেখ এবং $y=x^2-3x+2$-এর লেখ একই এবং একটি অধিবৃত্ত। এখন সমীকরণটি হইতে পাই

x	0	1	2	3	4	−1	−2	...
y	2	0	0	2	6	6	12	...



চিত্র নং 10

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় O মূল-বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া ঐ বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। হস্তাঙ্কিত সন্তত-রেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া যে অধিবৃত্ত হইল উহাই উদ্দিষ্ট লেখ।

লেখটি হইতে দেখা যাইতেছে যে উহা উপরের দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইতে পারে এবং উহার যে অংশটুকু X-অক্ষের নীচে আছে তাহা $x=1$ হইতে $x=2$-এর সীমার মধ্যে অবস্থিত। অতএব, xএর মান 1 হইতে 2এর মধ্যে হইলে yএর মান অর্থাৎ

প্রদত্ত অপেক্ষকটির মান ঋণাত্মক হইবে। ঐ সীমার বাহিরে xএর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যতই হউক না কেন, yএর মান আর ঋণাত্মক হইবে না। xএর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান অসীম পর্যন্ত ক্রমশঃ যতই বর্ধিত হইবে, তৎসঙ্গে yএর মানও ক্রমশঃ অসীম পর্যন্ত বর্ধিত হইবে ও, কেবল ধনাত্মক হইবে। এই বৃদ্ধির শেষ নাই বলিয়া লেখটির উভয় শাখাই X-অক্ষের উপরের দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত বুঝিতে হইবে।

উদা. 6. $y=x^2$ এবং $2y-5x+3=0$ সমীকরণদ্বয়ের লেখ দুইটি অঙ্কন কর এবং তাহা হইতে $2x^2-5x+3=0$ সমীকরণটির সমাধান কর।

[W. B. S. F. '52 ; D. B. '29]

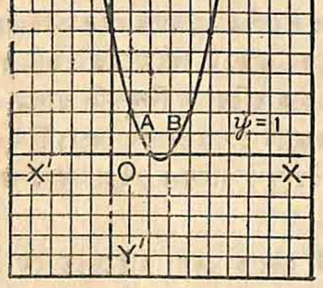
[সঙ্কেত : এখানে $y=x^2$...(1) এবং $2y-5x+3=0$,

বা, $y=\frac{5x-3}{2}$...(2), প্রথমে এই সমীকরণ দুইটির লেখ অঙ্কিত কর।

এখন দেখ, $2x^2-5x+3=0$, বা, $2x^2=5x-3$, $\therefore$ $x^2=\frac{5x-3}{2}$.

$\therefore$ (1) ও (2) সমীকরণদ্বয়ের লেখদ্বয় যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহাদের ভুজ দুইটিই $2x^2-5x+3=0$ সমীকরণটির বীজ হইবে। এখানে $x=1$, বা, 1·5.]

উদা. 7. $y=x^2-3x+2$এর লেখ আঁকিয়া লেখটি হইতে $x^2-3x+1=0$ সমীকরণটি সমাধান কর।



চিত্র নং 11

উদাহরণ 5 দেখ। ঐ অধিবৃত্তটি এখানে $y=x^2-3x+2$ সমীকরণের লেখ। ঐ লেখটি হইতে $x^2-3x+1=0$ এই সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে।

এখানে $x^2-3x+1=0$,

বা, $x^2-3x+2=1$.

মনে কর, $y=x^2-3x+2$, সুতরাং $y=1$; এই সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয়ের ছেদ-বিন্দু দুইটির ভুজদ্বয় নির্ণেয় বীজ হইবে। প্রথম সমীকরণের লেখ উদা. 5-এর মত আঁক। $y=1$এর লেখ হইবে X-অক্ষ হইতে 1 দৈর্ঘ্য একক উপরে X-অক্ষের সমান্তরাল রেখা। লেখদ্বয় পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (·4, 1) এবং (2·6, 1). $\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=·4$ বা 2·6.

উপবৃত্ত (Ellipse)

40. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের x^2 ও y^2এর সহগ অসমান ও ধনাত্মক হইলে, উহার লেখ উপবৃত্ত (Ellipse) হইবে। এইরূপ সমীকরণের সাধারণ আকার হয় $ax^2+by^2=c^2$ বা, $a^2x^2+b^2y^2=c^2$, যথা, $4x^2+9y^2=25$.

উদাহরণ। $9x^2+16y^2=144$ সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর।

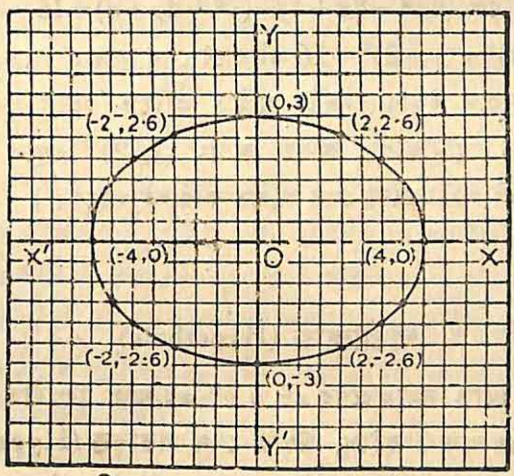
$9x^2+16y^2=144$, বা, $16y^2=144-9x^2=9(16-x^2)$,

বা, $y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)$, $\therefore\ y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\cdots(1)$

(1) হইতে পাই

x	0	±4	±1	±2	±3	±3·5	...
y	±3	0	±2·9	±2·6	±2·0	±1·5	...

এই বিন্দুগুলি সমীকরণটির লেখের উপর অবস্থিত। মনে কর, XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় লম্বভাবে O মূল-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম



চিত্র নং 12

বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন কর। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখাদ্বারা যোগ করিয়া যে উপবৃত্তটি (Ellipse) পাওয়া গেল, উহাই নির্ণেয় লেখ হইল।

[**দ্রষ্টব্য :** (*a*) উপরের (1) হইতে দেখা যায় যে, xএর মান 4 অপেক্ষা বেশী ও -4 অপেক্ষা কম হইতে পারে না ; কারণ, তাহা হইলে y-এর মান কাল্পনিক (imaginary) হয়। সুতরাং বুঝা গেল, লেখটি $x=\pm4$ এই দুই সমান্তরাল সরল রেখার মধ্যে সীমাবদ্ধ। আবার, x-এর কোন মান লইলে

তাহা হইতে yএর দুইটি মান পাওয়া যায়, উহারা সমান, কিন্তু একটি ঋণাত্মক ও অন্যটি ধনাত্মক। অতএব, লেখটি X-অক্ষ সম্বন্ধে প্রতিসম।

প্রদত্ত সমীকরণটিকে $x=\pm\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2}$, এইভাবেও লেখা যায়। ইহা হইতে দেখা যায় যে, y-এর মান 3 অপেক্ষা বেশী এবং -3 অপেক্ষা কম হইলে x-এর মান কাল্পনিক হইয়া পড়ে। সুতরাং লেখটি $x=\pm3$ এই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ। আর, y-এর কোন মানের পক্ষে xএর দুইটি সমান মান হয়, একটি ধনাত্মক, অন্যটি ঋণাত্মক। অতএব, লেখটি Y-অক্ষ সম্বন্ধেও প্রতিসম। আর এই লেখটি সকল দিকে সীমাবদ্ধ বলিয়া একটি বদ্ধ (closed) রেখা হইল।

(b) আরও দ্রষ্টব্য এই যে, প্রদত্ত সমীকরণটিকে রূপান্তরিত করিয়া $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, এই আকারেও লেখা যায়। ($c$) আবার $4x^2+y^2-8x-4y=8$

এই সমীকরণটিকে $(4x^2-8x+4)+(y^2-4y+4)=16$,

বা, $4(x-1)^2+(y-2)^2=16$ এইভাবে লেখা যায়। অতএব, ইহার লেখও একটি উপবৃত্ত। সহজে ইহার লেখটি অঙ্কিত করিতে হইলে মূলবিন্দুকে $(1, 2)$ স্থানাঙ্কযুক্ত বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিয়া অর্থাৎ $(1, 2)$ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া $4x^2+y^2=16$ এই সমীকরণের লেখ অঙ্কিত করিলেই হইবে।]

পরাবৃত্ত (Hyperbola)

41. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের x^2 ও y^2-এর সহগ বিপরীত চিহ্নযুক্ত (একটি ধনাত্মক, অন্যটি ঋণাত্মক) হইলে, উহার লেখ **পরাবৃত্ত** (Hyperbola) হইবে। উহার সাধারণ আকার হয় $ax^2-by^2=c^2$, বা, $a^2x^2-b^2y^2=c^2$.

যথা, $9x^2-25y^2=225$.

উদা. 1. $9x^2-16y^2=144$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কন কর।

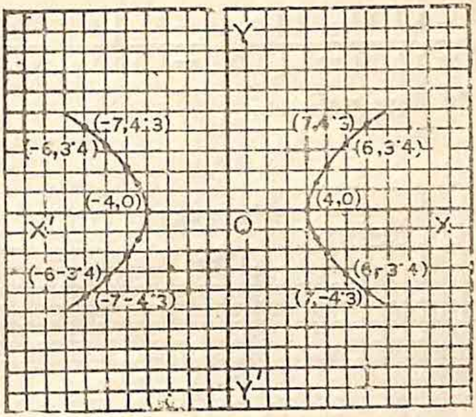
$9x^2-16y^2=144$, বা, $y^2=\frac{9x^2-144}{16}$, বা, $y^2=\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$,

উহা হইতে পাই

x	±4	±5	±6	±7	±4.5	...
y	0	±2.25	±3.4	±4.3	±1.5	...

মনে কর, XOX′ ও YOY′ অক্ষদ্বয় O মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া

উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন কর। এক এক পার্শ্বের বিন্দুগুলিকে হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিলে যে পরাবৃত্ত (Hyperbola) পাইবে, তাহাই উদ্দিষ্ট লেখ।



চিত্র নং 13

[দ্রষ্টব্য : (1) x-এর কোন মান লইলে y-এর দুইটি সমান মান (একটি ঋণাত্মক, অন্যটি ধনাত্মক) পাওয়া যায়, সুতরাং লেখটি X-অক্ষ সম্বন্ধে প্রতিসম। অনুরূপে উহা Y-অক্ষ সম্বন্ধেও প্রতিসম। (2) এখানে $x=0$ হইলে, y-এর মান কাল্পনিক হয় বলিয়া লেখটি Y-অক্ষকে কখনও ছেদ করিবে না। (3) এখানে x-এর মান ± 4এর মধ্যে হইলে y-এর মান কাল্পনিক হইবে, সুতরাং লেখটির কোন অংশ $x=\pm 4$ এই দুই সমান্তরাল রেখার মধ্যে থাকিবে না। (4) এই লেখটির দুইটি শাখা এবং উভয় শাখাই অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।]

উদা. 2. $9x^2-16y^2-18x-64y-91=0$এর লেখ অঙ্কন কর।

$$9x^2-16y^2-18x-64y-91=0,$$

বা, $(9x^2-18x+9)-(16y^2+64y+64)-36=0,$

বা, $9(x-1)^2-16(y+2)^2=36.$

এক্ষণে, মূলবিন্দুকে $(1,-2)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিয়া $9x^2-16y^2=36$ এই সমীকরণের রেখ অঙ্কিত করিলেই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ হইবে।

42. সমপরাবৃত্ত (Rectangular Hyperbola)

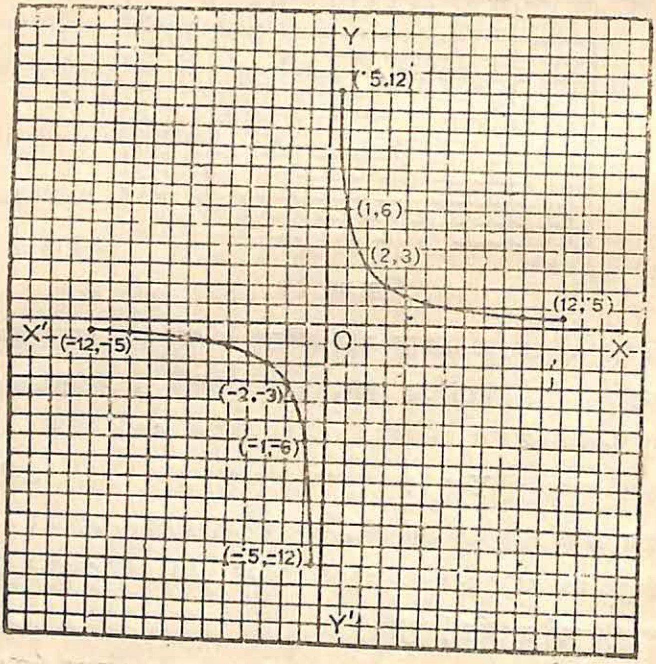
$xy=a$, বা $xy+ax+by=c$ এইরূপ আকারের সমীকরণের লেখ একটি বিশেষ পরাবৃত্ত, ইহাকে সমপরাবৃত্ত (Rectangular Hyperbola) বলে। যথা, $xy=8$.

উদাহরণ। $xy=6$ সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর।

$\because \; xy=6, \quad \therefore \; y=\frac{6}{x}$, ইহা হইতে পাই

x	·5	−·5	1	−1	2	−2	4	−4	6	−6	...
y	12	−12	6	−6	3	−3	1·5	−1·5	1	−1	...,

এই বিন্দুগুলি লেখটির উপরে অবস্থিত।



চিত্র নং 14

মনে কর, XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় O মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন কর। এক এক পার্শ্বের বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিলে যে সম-পরাবৃত্ত পাইবে উহাই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) এই লেখটির দুইটি শাখা। একটি শাখা OX ও OY রেখাদ্বয়ের মধ্যে এবং অপরটি OX′ ও OY′ রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। (2) এখানে x-এর মান ক্রমশঃ যত বাড়িবে, y-এর মান ক্রমশঃ তত কমিবে। অবশেষে x যদি অসীম হয়, তবে y-এর মান তখন শূন্য হইবে। অতএব রেখাটি

ক্রমাগত X-অক্ষের নিকটবর্তী হইলেও, উহাকে কোন সসীম দূরত্বের মধ্যে ছেদ করিবে না; কিন্তু অসীমে উহাদের ছেদবিন্দু থাকিবে। Y-অক্ষের পক্ষেও ইহা সত্য হইবে।]

Exercise 14

লেখ অঙ্কিত কর :—

1. $x^2+y^2=36.$ [C. U. '41] 2. $(x-2)^2+(y-1)^2=25.$

3. $x^2-8y+y^2-6x-24=0.$ [D. B. '26]

4. $(x+1)^2+(y-3)^2=16.$ 5. $x^2+y^2=48.$

6. $x^2+y^2=40.$ 7. $y^2=4x.$ [C. U. '25, '37, '40, '42]

8. $y=(x+1)^2.$ [C. U. '27] 9. $y=x^2-x-6.$

10. $y=4x^2$ 11. $y^2+4x=0.$ [C. U. '28, '39]

12. $5x^2-10x+9.$ [C. U. '47] 13. $x^2+y^2-2x-4y=20.$

14. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ [C. U. '44] 15. $4x^2+9y^2=64.$

16. $x^2+y^2=1.$ 17. $x^2-y^2=9.$

18. $xy=12.$ [A. U. '16] 19. $x^2=25.$

20. $3x^2-5xy+2y^2=0.$ 21. $9y^2-4x^2=36.$

22. $xy=120.$ [A. U. 1910]

23. $x^2+y^2=169$ এবং $x+y=17$এর লেখ অঙ্কিত করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [G. U. '51]

24. $y=x^2$ এবং $y=2x-1$এর লেখ দুইটি কোথায় পরস্পর ছেদ করিবে? [C. U. '45]

25. $y=x$ ও $y=\frac{x^2}{4}$এর লেখ অঙ্কন কর। উহারা কোন্ কোন্ বিন্দুতে ছেদ করিবে? [E. B. S. B. '51]

26. x^2এর মান $-\infty$ হইতে $+\infty$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে x^2-4x+3এর মান ও চিহ্নের (sign) কিরূপ পরিবর্তন হইবে তাহা লেখ সাহায্যে দেখাও।

27. $x=-4$ হইতে $x=4$ এই সীমার মধ্যে $4y=x^2$ এবং $2y=x+4$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং উহাদের ছেদবিন্দুগুলি নির্ণয় কর। [C. U. '51]

28. $y=4x^2-3x+2$এর লেখ আঁক এবং উহার সাহায্যে yএর লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [E. B. S. B. '49]

29. $x^2+y^2=25$ এবং $x+y=7$এর লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '12 ; D. B. '25]

30. $2+x-2x^2$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং লেখ হইতে অপেক্ষকটির বৃহত্তম মান নির্ণয় কর। [D. B. '40]

31. $y^2=8x$ এবং $y=2x+1$এর লেখ দুইটি আঁক। যদি উহাদের কোন সাধারণ বিন্দু থাকে, তবে তাহা নির্ণয় কর। [G. U. '50]

32. $y=x^2-6x+10$এর লেখ আঁক এবং yএর লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [D. B. '24]

লেখ সাহায্যে সমাধান কর :

33. $x^2-x-2=0$ [C. U. '49 ; G. U. '48]

34. $2x^2-5x+3=0$ [E. B. S. B. '48]

35. $2x^2-9x-5=0$ [C. U. '50]

36. $x^2=3y,\ y=2x$ [W. B. S. F. '55]

37. $3x^2-10x+3=0$ [W. B. S. F. '54]

38. লেখ সাহায্যে প্রমাণ কর যে x-এর যে কোন বাস্তব মানে x^2-4x+5 অপেক্ষকটি ধনাত্মক হইবে।

39. $y=x^2$ এবং $y=2x+3$, ইহাদের লেখ অঙ্কন কর এবং ঐ লেখ হইতে $x^2=2x+3$ সমীকরণের সমাধান কর। [G. U. '49]

40. $x=\pm 4$ এই সীমার মধ্যে $4y=x^2$ ও $2y=x+4$এর লেখ দুইটি আঁক এবং ছিন্ন জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. '41]

41. $y=x^2+3$ ও $y=4x$এর লেখ আঁকিয়া তাহা হইতে $x^2-4x+3=0$ সমীকরণের সমাধান কর। [D. B. '37]

[সঙ্কেত : $x^2-4x+3=0$, বা $x^2+3=4x$; সুতরাং $y=x^2+3$ এবং $y=4x$ এই সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ দুইটি নির্ণেয় বীজ।]

42. একই চিত্রে $2x+1$ এবং x^2এর লেখ অঙ্কিত কর। ঐ লেখদ্বয় পড়িয়া বল x-এর এক বা একাধিক মান কত হইলে $x^2=2x+1$ হইবে। [C. U. '30]

43. $x^2+y^2=16$ ও $x+y=2$এর লেখ দুইটি আঁকিয়া ছিন্ন জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. '13]

44. $y=x^2-4x+5$এর লেখ $x=0$ ও $x=4$ এই সীমার মধ্যে আঁক এবং y-এর ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। [C. U. '18]

45. $x=-1$ হইতে $x=+5$ এই সীমার মধ্যে $2x^2-7x-3$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং লেখ হইতে $2x^2-7x+3=0$ সমীকরণের বীজগুলি নির্ণয় কর। [C. U. '35]

46. $y=x^2+3x$ ও $y=-2$এর লেখ অঙ্কিত করিয়া $x^2+3x+2=0$ সমীকরণের বীজগুলি নির্ণয় কর। [C. U. '46]

47. $y^2=4x$এর লেখাঙ্কন কর এবং দেখাও যে ঐ লেখটির কোন অংশ X-অক্ষের ঋণাত্মক ভাগে থাকিবে না। [C. U. '25]

48. $y=x^2$-এর লেখাঙ্কন করিয়া $x^2-6x+8=0$ সমীকরণটি সমাধান কর। [C. U. '47]

[সঙ্কেত : $x^2-6x+8=0$ বা, $x^2=6x-8$; মনে কর $y=x^2$; $\therefore$ $y=6x-8$. এখানে $y=x^2$এর লেখ আঁকিতে হইবে এবং $y=6x-8$এর লেখটিও অঙ্কিত করিলে তবে প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান করা যাইবে।]

49. $y=x^2$ ও $x=y^2$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং উহাদের ছেদবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '32]

50. $x=-4$ হইতে $x=2$ এই সীমার মধ্যে x^2+2x+5এর লেখ অঙ্কিত কর। সেই লেখ হইতে ঐ অপেক্ষকটির ক্ষুদ্রতম মান কত এবং x-এর মান কত হইলে ঐ ক্ষুদ্রতম মান পাওয়া যায় তাহা নির্ণয় কর। [D. B. '32]

51. $x=-5$ হইতে $x=3$ এই সীমার মধ্যে x^2+2x+3 অপেক্ষকের লেখ অঙ্কিত কর এবং লেখ দেখিয়া নিম্নের প্রশ্নগুলির উত্তর লিখ :—

(i) প্রদত্ত অপেক্ষকটির ক্ষুদ্রতম মান কত ?

(ii) x-এর মান কত হইলে ঐ ক্ষুদ্রতম মান হয় ?

(iii) x-এর মান কত হইলে অপেক্ষকটির মান 4 হইবে ? [M. U. '26]

52. $x=\pm 20$ এই সীমার মধ্যে $xy=80$ এই সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর। [M U. '13]

লেখ অঙ্কিত কর :—

53. $y=\frac{1}{2}x^2-3$ [M. U. '21]   54. $\sqrt{x}$

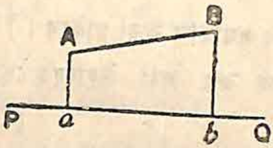
55. $4x^2-16x+y^2+2y-8=0$

56. $9x^2-18x-16y^2-32x-151=0.$

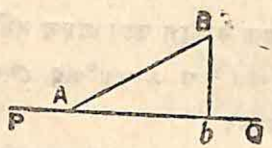
দ্বিতীয় অধ্যায়

জ্যামিতি

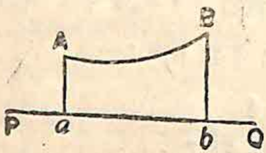
1. অভিক্ষেপ (Projection) : বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্বপাত করিলে ঐ লম্বটির পাদবিন্দুকে ঐ সরলরেখার উপর উক্ত বহিঃস্থ বিন্দুর **অভিক্ষেপ** বলা হয়। চিত্র 'ক'-এ বহিঃস্থ A বিন্দু হইতে PQ সরলরেখার উপর Aa লম্ব টানা হইয়াছে, সুতরাং PQ সরলরেখার উপর A বিন্দুর অভিক্ষেপ হইল *a* বিন্দু। চিত্র 'খ'-এ A বিন্দুর অভিক্ষেপ A বিন্দুই হইবে। কারণ, A বিন্দু PQ-এর উপর অবস্থিত।



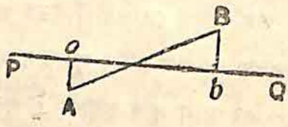
চিত্র ক



চিত্র খ



চিত্র গ



চিত্র ঘ

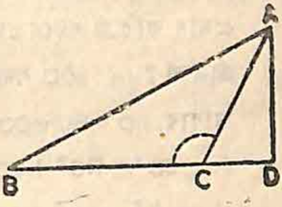
কোন সরলরেখার উপর অন্য কোন সরলরেখা বা বক্ররেখার অভিক্ষেপ হইতে পারে। চিত্র 'ক'-এ মনে কর, PQ সরলরেখার উপর AB সরলরেখার দুই প্রান্তবিন্দু A ও B হইতে Aa ও Bb লম্ব টানা হইল। এখানে লম্ব দুইটি দ্বারা PQএর ছিন্ন অংশ *ab*-কে সরলরেখার উপর AB-র লম্ব অভিক্ষেপ বলে। চিত্র 'খ'-এ PQ-এর উপর ABর অভিক্ষেপ Ab হইয়াছে। অনুরূপে চিত্র 'গ'-এ *ab*কে PQ সরলরেখার উপর AB বক্ররেখার লম্ব-অভিক্ষেপ বলা হয়।

লম্ব টানিয়া অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয় বলিয়া ঐ অভিক্ষেপকে লম্ব-অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection) বলে।

উপপাদ্য 1

স্থূলকোণী ত্রিভুজে, স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র, উহার অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয় এবং ঐ দুই বাহুর যে-কোন একটি ও তাহার উপর অপর বাহুটির লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান হইবে।

[In an obtuse-angled triangle, the square on the side opposite to the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.]



১নং চিত্র

ABC ত্রিভুজের $\angle ACB$ স্থূলকোণ। মনে কর, BC-র বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব টানা হইয়াছে। সুতরাং CD হইল BC-র উপর AC-র লম্ব-অভিক্ষেপ। এখানে স্থূলকোণের বিপরীত বাহু AB এবং অপর বাহুদ্বয় BC ও AC.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.

প্রমাণ : $\because$ $\angle D$ সমকোণ, $\therefore$ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ এবং $AC^2 = CD^2 + AD^2$.

আবার, $\because$ C বিন্দুতে BD অন্তর্বিভক্ত অর্থাৎ $BD = BC + CD$.

$\therefore$ $BD^2 = (BC + CD)^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$;

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD$

$= AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.

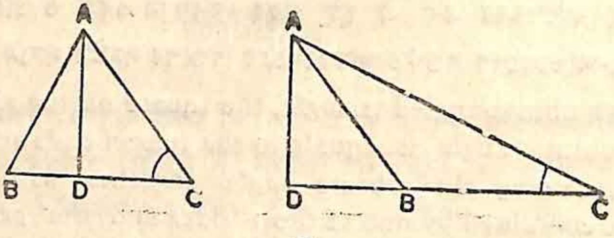
উপপাদ্য 2

যে কোন ত্রিভুজে, কোন সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র, উহার অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি হইতে ঐ দুই বাহুর যে কোন একটি ও তাহার উপর অপর বাহুটির লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের অন্তরফলের সমান হইবে।

[In any triangle, the square on the side opposite to an acute angle is equal to the sum of the squares on the other two sides diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.]

ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ, AB উহার বিপরীত বাহু এবং অপর বাহুদ্বয় BC ও AC. মনে কর, BC-র উপর (প্রথম চিত্র) বা CB-র বর্ধিতাংশের

উপর (দ্বিতীয় চিত্র) AD লম্ব টানা হইয়াছে ; সুতরাং CD হইল BC-র উপর AC-র লম্ব-অভিক্ষেপ।



২নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$.

প্রমাণ : $\because \angle D$ সমকোণ, $\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ এবং $AC^2 = AD^2 + CD^2$

আবার, $BD = BC - CD$, অথবা $BD = CD - BC$.

$\therefore \; BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD$.

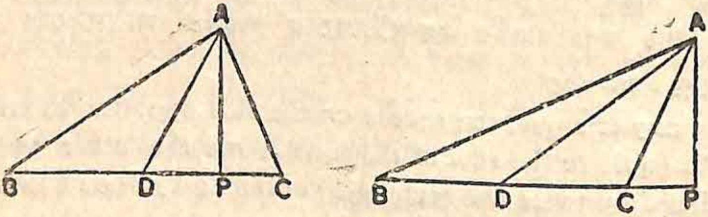
$\therefore \; AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC.CD$.
$\qquad = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$.

[**দ্রষ্টব্য :** কোন ত্রিভুজে $\angle C$ সমকোণ হইলে $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
$\angle C$ স্থূলকোণ হইলে $AB^2 > AC^2 + BC^2$.
$\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হইলে $AB^2 < AC^2 + BC^2$.]

Apollonius' Theorem

ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধাংশের উপর বর্গক্ষেত্র ও তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ।

[In any triangle, the sum of the squares on two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median that bisects the third side.]



৩নং চিত্র

ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$.

অঙ্কন : BC-র বা BC-র বর্ধিতাংশের উপর AP লম্ব টান। এখানে PD হইল BC-র উপর AD-র অভিক্ষেপ।

প্রমাণ : মনে কর, AB ও AC অসমান, সুতরাং ADB ও ADC কোণের মধ্যে একটি স্থূলকোণ এবং অপরটি সূক্ষ্মকোণ হইবে।

এখানে $\angle ADB$ স্থূলকোণ, সুতরাং $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ।

$\therefore$ $\triangle ABD$এ, $\because$ $\angle ADB$ স্থূলকোণ, $\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.PD$,

এবং $\triangle ADC$এ, $\because$ $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ, $\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.PD$

$$= AD^2 + BD^2 - 2BD.PD \quad (\because CD = BD)$$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2.$

যদি AB ও AC সমান হয়, তবে AD মধ্যমাটি BCর উপর লম্ব হইবে। তখন $AB^2 = AD^2 + BD^2$ এবং $AC^2 = AD^2 + CD^2 = AD^2 + BD^2$.

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2.$$

বিবিধ সমাধান (1)

উদা. 1. কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় যথাক্রমে 2, 3 ও 4 ইঞ্চি ; প্রমাণ কর, উহা স্থূলকোণী ত্রিভুজ। [C. U. '33]

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের সম্মুখীন বাহুই বৃহত্তম বাহু এবং ঐ বৃহত্তম বাহুর বর্গ অন্য দুই বাহুর উপর বর্গদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। এখানেও দেখা যাইতেছে যে, $4^2 = 16$ এবং $3^2 + 2^2 = 13$ অর্থাৎ $4^2 > (3^2 + 2^2)$.

$\therefore$ 4 ইঞ্চি বাহুর বিপরীত কোণটি স্থূলকোণ হইবে। অতএব ত্রিভুজটি স্থূলকোণী।

উদা. 2. ABC ত্রিভুজে AD, BC বাহুর উপর লম্ব এবং O, BC-র মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, AB^2 ও AC^2-এর অন্তরফল $2BC.OD$-এর সমান।

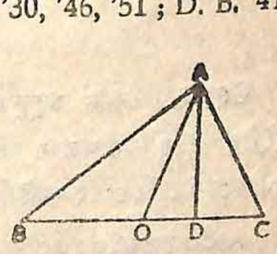
[C. U. '30, '46, '51 ; D. B. '41]

Hints : $\angle AOB > \angle D$, সুতরাং উহা স্থূলকোণ এবং $\angle AOC$ সূক্ষ্মকোণ।

এখন $AB^2 = AO^2 + BO^2 + 2BO.OD \cdots (1)$.

$\triangle AOC$র $AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2CO.OD$

$= AO^2 + BO^2 - 2BO.OD \; (\because BO = CO) \cdots (2)$



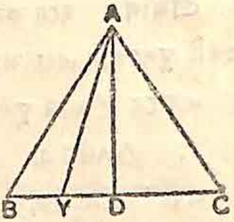
৪নং চিত্র

এক্ষণে (1) ও (2)এর অন্তরফল

$AB^2 \sim AC^2 = 4BO.OD = 2(2BO).OD = 2BC.OD \quad (\because 2BO = BC,)$

উদা. 3. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিকে অন্তর্বিভক্ত করিয়া AY রেখা টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $AY^2 = AB^2 - BY.YC$. [C. U. '19, '47]

A হইতে BC-র উপর AD লম্ব টান। $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু বলিয়া AD, ভূমি BCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। এখন $\angle D$ সমকোণ বলিয়া $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ।



৫নং চিত্র

$\because$ BD, ABর লম্ব-অভিক্ষেপ,

$\therefore AY^2 = AB^2 + BY^2 - 2BY.BD$

$= AB^2 - BY(2BD - BY)$

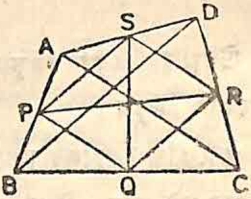
$= AB^2 - BY(BC - BY) = AB^2 - BY.YC.$

উদা. 4. যে কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের বর্গ-সমষ্টি, উহার বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখাদ্বয়ের বর্গসমষ্টির দ্বিগুণ।

P, Q, R, S যথাক্রমে ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD, DA বাহুর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AC^2 + BD^2 = 2(PR^2 + QS^2)$



৬নং চিত্র

প্রমাণ : AC, PR, QS, PQ, QR, RS, SP যোগ কর। $\triangle ABC$র AB ও BCর মধ্যবিন্দু P ও Q.

$\therefore AC = 2PQ$. $\therefore AC^2 = 4PQ^2$. অনুরূপে $BD^2 = 4PS^2$.

আবার, PQRS একটি সামান্তরিক $\therefore PR^2 + QS^2 = PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2$
$= 2PQ^2 + 2PS^2$.

অতএব, $AC^2 + BD^2 = 4PQ^2 + 4PS^2 = 2(2PQ^2 + 2PS^2) = 2(PR^2 + QS^2)$।

উদা. 5. কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির উপর বর্গক্ষেত্রগুলির সমষ্টি উহার কর্ণ দুইটির উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয় এবং কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখার উপর বর্গক্ষেত্রের চারিগুণের সমষ্টির সমান। [C. U. 1924]

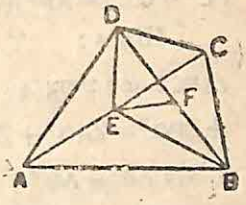
ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F.

প্রমাণ করিতে হইবে $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$

EF, EB, ED যোগ কর।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজে ∵ BE মধ্যমা, ∴ $AB^2+BC^2=2AE^2+2BE^2$, এবং ADC ত্রিভুজে ∵ DE মধ্যমা, ∴ $AD^2+DC^2=2AE^2+2DE^2$.

আবার EF, ত্রিভুজ EBDর মধ্যমা বলিয়া $EB^2+ED^2=2BF^2+2EF^2$.



৭নং চিত্র

$\therefore\ AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$

$=2AE^2+2BE^2+2AE^2+2DE^2$

$=4AE^2+2(BE^2+DE^2)$

$=4AE^2+2(2BF^2+2EF^2)=4AE^2+4BF^2+4EF^2$

$=(2AE)^2+(2BF)^2+4EF^2=AC^2+BD^2+4EF^2$.

উদা. 6. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির বর্গসমষ্টির তিনগুণ উহার মধ্যমাগুলির বর্গসমষ্টির চারিগুণের সমান। [C. U. '33, '37]

$\triangle$ABCর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $3(AB^2+BC^2+AC^2)=4(AD^2+BE^2+CF^2)$.

প্রমাণ : AD মধ্যমা বলিয়া $AB^2+AC^2=2BD^2+2AD^2$

অনুরূপে, $AB^2+BC^2=2CE^2+2BE^2$

এবং $BC^2+AC^2=2AF^2+2CF^2$

(যোগ করিয়া) $2(AB^2+BC^2+AC^2)=2BD^2+2CE^2+2AF^2+2(AD^2+BE^2+CF^2)$, $\therefore\ 4(AB^2+BC^2+AC^2)=4BD^2+4CE^2+4AF^2+4(AD^2+BE^2+CF^2)=(2BD)^2+(2CE)^2+(2AF)^2+4(AD^2+BE^2+CF^2)=BC^2+AC^2+AB^2+4(AD^2+BE^2+CF^2)$,

$\therefore\ 3(AB^2+BC^2+AC^2)=4(AD^2+BE^2+CF^2)$.

উদা. 7. যদি ABC ত্রিভুজের G ভরকেন্দ্র (মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু) হয়, তবে প্রমাণ কর যে $AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$.

[6নং উদাহরণ অনুসারে] $3(AB^2+BC^2+AC^2)=4(AD^2+BE^2+CF^2)$
$=4\{(\frac{3}{2}AG)^2+(\frac{3}{2}BG)^2+(\frac{3}{2}CG)^2\}$ [∵ মধ্যমাত্রয় সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে]
$=4(\frac{9}{4}AG^2+\frac{9}{4}BG^2+\frac{9}{4}CG^2)=9(AG^2+BG^2+CG^2)$,

∴ উভয় পক্ষকে 3 দিয়া ভাগ করিয়া পাই

$AB^2+BC^2+AC^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$,

উদা. 8. একটি বৃত্তের AB ব্যাসের উপর কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী P ও Q দুইটি বিন্দু। যদি পরিধির উপর C যে কোন একটি বিন্দু হয়, তবে $PC^2+QC^2=AP^2+AQ^2$.

[**Hints :** $\because$ $PO=QO$, $\therefore$ CO, $\triangle PCQ$-এর মধ্যমা। $\therefore$ $PC^2+QC^2=2CO^2+2PO^2=2AO^2+2PO^2$ ($\because$ $AO=CO$)

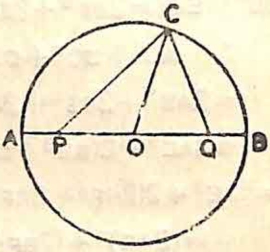
আবার AP^2+AQ^2

$=(AO-PO)^2+(AO+OQ)^2$

$=(AO-PO)^2+(AO+PO)^2$

$=AO^2+PO^2-2AO.PO+AO^2+PO^2+2AO.PO=2AO^2+2PO^2$.

$\therefore$ $PC^2+QC^2=AP^2+AQ^2$.]



৮নং চিত্র

Exercise 1

1. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণ 120° হইলে উহার ভূমির উপর বর্গ অন্য প্রত্যেক বাহুর উপর বর্গের তিনগুণ হইবে। [C. U. '16]

2. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল DE টানা হইল। প্রমাণ কর যে, BE ও CE-র উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তরফল BC ও DE-র অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান। [C. U. '38]

3. সামান্তরিকের বাহুগুলির উপর বর্গক্ষেত্রগুলির সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপর বর্গদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

4. ABC ত্রিভুজে AD, BC-র উপর লম্ব এবং $AD^2=BD.CD$ হইলে $\angle BAC$ সমকোণ হইবে। [B. U. '14]

[**Hints :** $AB^2+AC^2=BD^2+AD^2+CD^2+AD^2$ ($\because$ $\angle D$ সমকোণ)

$=BD^2+CD^2+2AD^2=BD^2+CD^2+2BD.CD$

$=(BD+CD)^2=BC^2$, $\therefore$ $\angle BAC$ সমকোণ।]

5. $\triangle ABC$-র $\angle C=120°$, প্রমাণ কর যে, $AB^2=AC^2+BC^2+AC.BC$.

6. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি গতিশীল বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি ধ্রুবক ; উহার সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

7. AB সরলরেখা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত এবং D পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, $AD^2-BD^2=4AC.CD$.

8. $\triangle ABC$-এর $AB=AC$ এবং BD, ACর উপর লম্ব ; প্রমাণ কর যে $BC^2=2AC.CD$.

9. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর এবং ভূমির উপর মধ্যমার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4, 5 ও 3·5 সেন্টিমিটার হইলে উহার ভূমির দৈর্ঘ্য কত? [উত্তর : 5·7 সে. মি.]

10. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে △ABCএর ক্ষেত্রফল $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ হইবে।

অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion)

2. অনুপাত (Ratio)।

একই জাতীয় দুইটি বস্তুর মধ্যে একটি অপরটির কতগুণ বা কত অংশ তাহা যে সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাহাকে ঐ বস্তু দুইটির অনুপাত বলে।

মনে কর, 6 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চি মাপের দুইটি সরলরেখা আছে। উহাদের দৈর্ঘ্য-দ্বয়ের অনুপাত $\frac{6}{4}$ অর্থাৎ $\frac{3}{2}$ এই ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এইরূপ দুইটি একজাতীয় বস্তুর পরিমাণ a ও b একক হইলে, উহাদের অনুপাত $\frac{a}{b}$ হইবে। এই অনুপাত লিখিতে হইলে $\frac{a}{b}$ অথবা $a : b$ এই ভাবে লেখা হয়। $a : b$ এই অনুপাতের প্রথম রাশি a-কে **পূর্ব-রাশি** (antecedent) এবং দ্বিতীয় রাশি b-কে **উত্তর রাশি** (consequent) বলে।

দ্রষ্টব্য : (1) দুইটি বস্তু এক জাতীয় না হইলে তাহাদের অনুপাত নির্ণয় করা যায় না। যথা—দৈর্ঘ্যের সহিত ওজনের বা কোণের তুলনা অর্থাৎ অনুপাত হয় না। (2) অনুপাতটি একটি ভগ্নাংশ হইবে। যথা, 6 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চির অনুপাত হইবে $\frac{6}{4}$ বা $\frac{3}{2}$ কিন্তু $\frac{3}{2}$ ইঞ্চি নহে।

3. প্রমেয় ও অমেয় মান।

যে সকল রাশি কোন নির্দিষ্ট এককের গুণিতক তাহাদিগকে **প্রমেয়** (commensurable) বলে। যদি দুইটি রাশিকে কোন একটি এককের দ্বারা পূর্ণরূপে মাপা যায়, তবে তাহারা প্রমেয় এবং তাহাদের অনুপাত দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হয়।

জ্যামিতিক অনুপাত সর্বদা উক্তরূপ হয় না। মনে কর, একটি বর্গক্ষেত্রের বাহু এক ইঞ্চি, সুতরাং উহার কর্ণ $\sqrt{2}$ ইঞ্চি হইবে। এখন দেখ $\sqrt{2}$ সংখ্যাটি কোন নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করা যায় না। এইরূপ মানকে **অমেয়** (incommensurable) বলে।

4. সমানুপাত (Proportion)।

a, b, c ও d এই রাশি চারিটি যদি এরূপ হয় যে, a ও bর অনুপাত c ও dর অনুপাতের সমান (অর্থাৎ $a : b=c : d$), তাহা হইলে ঐ চারিটি রাশিকে **সমানুপাতী** (proportional) বলে এবং ঐ অনুপাত দুইটিকে সমানুপাত বলে। এই সমানুপাতকে $a : b=c : d$ কিংবা $a : b :: c : d$ এইভাবে লেখা যায়।

এইরূপে যদি $a : b = b : c$ হয়, তবে a, b, cকে সমানুপাতী বলা যাইবে। a, b, c ও d সমানুপাতী হইলে দুই প্রান্তের রাশি দুইটিকে অর্থাৎ a ও dকে **প্রান্তীয়** (extremes) এবং মধ্যের রাশি দুইটিকে অর্থাৎ b ও cকে **মধ্যক** (means) বলে। আবার চতুর্থ রাশিকে প্রথম তিনটির **চতুর্থ সমানুপাতী** (fourth proportional) বলে।

a, b, c সমানুপাতী হইলে, দ্বিতীয় রাশি bকে (অর্থাৎ মধ্যের রাশিকে) প্রথম ও তৃতীয় রাশির **মধ্য-সমানুপাতী** (mean proportional) বলে এবং $b^2 = ac$ হয়। এখানে cকে তৃতীয় সমানুপাতী (third proportional) বলা যায়।

দ্রষ্টব্য: সমানুপাতী রাশি চারিটির মধ্যে সবগুলি সমজাতীয় হইতে পারে, অথবা প্রথম দুইটি একজাতীয় এবং শেষ দুইটি অন্য প্রকারের সমজাতীয় হইতে পারে। যথা, 12 ইঞ্চি : 6 ইঞ্চি $= 2 : 1$, এবং 4 গ্রাম : 2 গ্রাম $= 2 : 1$, সুতরাং 12 ইঞ্চি : 6 ইঞ্চি = 4 গ্রাম : 2 গ্রাম।

∴ 12 ইঞ্চি, 6 ইঞ্চি, 4 গ্রাম ও 2 গ্রাম সমানুপাতী।

5. **অনুপাত সম্বন্ধীয় কতকগুলি প্রক্রিয়া।**

(1) **একান্তর প্রক্রিয়া** (Alternendo):

যদি $a : b = c : d$ হয়, তবে $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ হইবে।

(2) **বিপরীত প্রক্রিয়া** (Invertendo)

$a : b = c : d$ হইলে, $b : a = d : c$ হইবে।

(3) **যোগ প্রক্রিয়া** (Componendo):

$a : b = c : d$ হইলে, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ হইবে।

(4) **ভাগ প্রক্রিয়া** (Dividendo):

$a : b = c : d$ হইলে, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ হইবে।

(5) **যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া** (Componendo & Dividendo):

$a : b = c : d$ হইলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ হইবে।

(6) **সংযোগ প্রক্রিয়া** (Addendo):

$a : b = c : d = e : f = \cdots$ হইলে, প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$ হইবে।

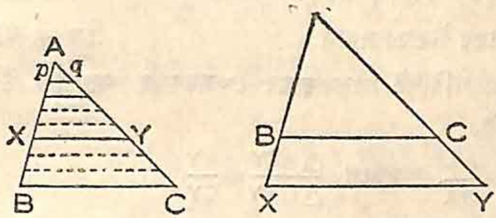
(7) **বজ্রগুণন প্রক্রিয়া** (Cross multiplication):

$a : b = c : d$ হইলে, $ad = bc$ হইবে।

উপপাদ্য 3

কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমানুপাতে বিভক্ত করে।

[A straight line drawn parallel to one side of a triangle cuts the other two sides, or those sides produced, proportionally.]



৯নং চিত্র

স্বীকার : মনে কর, △ABCতে BC বাহুর সমান্তরাল XY রেখা AB ও ACকে কিংবা AB ও ACর বর্ধিত অংশকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AX : BX = AY : CY.

প্রমাণ : মনে কর, AX ও BX প্রমেয় এবং উভয়কে সাধারণ দৈর্ঘ্য p দ্বারা মাপা যায়, সুতরাং মনে কর, $AX = m.p$ এবং $BX = n.p$.

$$\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n}.$$

এক্ষণে, AX ও XBকে p দৈর্ঘ্যের সমান যথাক্রমে m ও n সংখ্যক অংশে ছেদ কর। প্রত্যেক ছেদবিন্দু হইতে BCর সমান্তরাল করিয়া সরলরেখা টান। তাহা হইলে উহারা AY ও YCকে যথাক্রমে m ও n সমান অংশে বিভক্ত করিবে। মনে কর, এই সমান অংশগুলির প্রত্যেকটি q দৈর্ঘ্য এককের সমান।

সুতরাং $\frac{AY}{YC} = \frac{m.q}{n.q} = \frac{m}{n}$ হইবে। অতএব, $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$.

বিকল্প প্রমাণ :

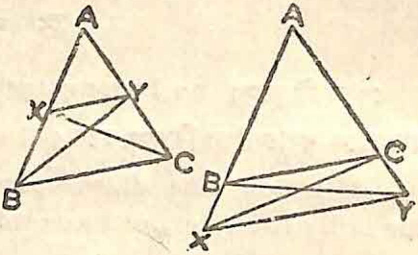
[যাহা দেওয়া আছে ও প্রমাণ করিতে হইবে তাহা আগে লিখিবে।]

অঙ্কন : BY ও CX যোগ কর।

প্রমাণ : $\triangle BXY$ ও $\triangle CXY$ একই XY ভূমির উপর এবং XY ও BC সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore \quad \triangle BXY = \triangle CXY$

$\therefore \quad \dfrac{\triangle AXY}{\triangle BXY} = \dfrac{\triangle AXY}{\triangle CXY} \cdots (i)$



চিত্র নং 9A

এক্ষণে, $\triangle AXY$ ও $\triangle BXY$-এর AX ও BX ভূমিদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং ইহাদের শীর্ষবিন্দু একই Y বিন্দু বলিয়া ইহাদের উচ্চতা সমান।

$\because$ সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়,

$\therefore \quad \dfrac{\triangle AXY}{\triangle BXY} = \dfrac{AX}{BX}$, অনুরূপে $\dfrac{\triangle AXY}{\triangle CXY} = \dfrac{AY}{CY}$.

$\therefore$ (i) হইতে $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY}$.

[অনুসিদ্ধান্ত : $\because \dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY}$, $\therefore \dfrac{AX+BX}{BX} = \dfrac{AY+CY}{CY}$, বা, $\dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AC}{CY}$

অনুরূপে, $\dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AC}{AY}$ এবং $\dfrac{BX}{AX} = \dfrac{CY}{AY}$.]

উপপাদ্য 4

যদি কোন সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে, তবে সেই সরলরেখা ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হইবে।

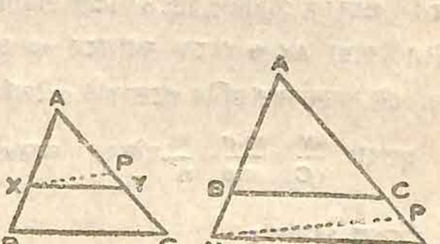
[If a straight line cuts two sides of a triangle proportionally, it is parallel to the third side.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজে XY রেখা AB ও ACকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে এরূপে, ছেদ করিয়াছে যে,

$AX : XB = AY : YC.$

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$XY \parallel BC.$



১০নং চিত্র

প্রমাণ : যদি XY রেখা BCর সমান্তরাল স্বীকার না করা হয়, তবে মনে কর, $XP \parallel BC$ টানা হইল এবং উহা যেন ACকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\because$ XP ∥ BC, $\therefore$ $\frac{AX}{BX}=\frac{AP}{PC}$,

কিন্তু $\frac{AX}{BX}=\frac{AY}{YC}$ (স্বীকার), $\therefore$ $\frac{AP}{PC}=\frac{AY}{YC}$,

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, AC রেখা P ও Y এই দুইটি বিভিন্ন বিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে ; কিন্তু ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ P ও Y একই বিন্দু হইবে। $\therefore$ XY ও BC সমান্তরাল।

[দ্রষ্টব্য : উপরের প্রমাণ দেখ, $\frac{AP}{PC}=\frac{AY}{YC}$.

$\therefore$ $\frac{AP+PC}{PC}=\frac{AY+YC}{YC}$ (১ম চিত্রে যোগক্রিয়া দ্বারা)

$\therefore$ $\frac{AC}{PC}=\frac{AC}{CY}$, $\therefore$ PC=YC, $\therefore$ P ও Y একই বিন্দু হইতে হইবে।

আবার ২য় চিত্রে ভাগক্রিয়া দ্বারা $\frac{AP-PC}{PC}=\frac{AY-YC}{YC}$ করিয়াও ঐ সিদ্ধান্ত পাওয়া যায়।]

বিকল্প প্রমাণ :

[যাহা দেওয়া আছে ও প্রমাণ করিতে হইবে তাহা আগে লিখিবে।]

অঙ্কন : BY ও CX যোগ কর। [চিত্র নং 9A আঁক]

প্রমাণ : $\because$ △AXY ও △BXY-এর AX ও BX ভূমিদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং উহাদের একই শীর্ষবিন্দু Y, $\therefore$ উহাদের উচ্চতা সমান।

$\therefore$ $\frac{\triangle AXY}{\triangle BXY}=\frac{AX}{BX}$. অনুরূপে $\frac{\triangle AXY}{\triangle CXY}=\frac{AY}{CY}$.

কিন্তু, $\frac{AX}{BX}=\frac{AY}{CY}$ (স্বীকার) $\therefore$ $\frac{\triangle AXY}{\triangle BXY}=\frac{\triangle AXY}{\triangle CXY}$,

$\therefore$ △BXY=△CXY.

এক্ষণে, $\because$ এই সমান ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি XY-এর উপর ইহার একই পার্শ্বে অবস্থিত, $\therefore$ উহারা দুই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে থাকিবে।

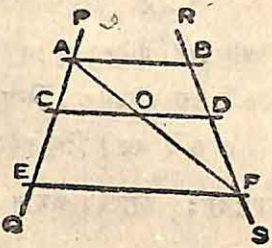
$\therefore$ XY রেখা BC রেখার সমান্তরাল।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $\frac{AX}{BX}=\frac{AY}{CY}$ হয়, অথবা যদি $\frac{AB}{BX}=\frac{AC}{CY}$ হয়, কিংবা যদি $\frac{AB}{AX}=\frac{AC}{AY}$ হয়, তবে XY ∥ BC হইবে।

বিবিধ সমাধান (2)

উদা. 1. তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা যে কোন দুইটি ভেদককে সমানুপাতে ছেদ করে। [C. U. '15, '39, '26, '40 ; G. U. '49]

মনে কর, AB, CD ও EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি PQ ভেদক হইতে AC ও CE অংশদ্বয় এবং PS ভেদক হইতে BD ও DF অংশদ্বয় ছিন্ন করিয়াছে।



১১নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}$.

AF যোগ কর ; উহা CDকে যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : △AEFএ ∵ CO ∥ EF, ∴ $\frac{AC}{CE}=\frac{AO}{OF}$.

আবার △ABFএ, ∵ OD ∥ AB, ∴ $\frac{AO}{OF}=\frac{BD}{DF}$.

অতএব, $\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}$.

উদা. 2. ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে অঙ্কিত ভূমির সমান্তরাল সরলরেখাটি অপর বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. '23]

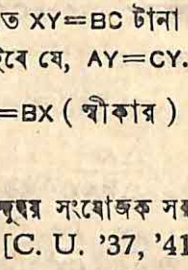
মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু X হইতে XY∥BC টানা হইল। XY যেন ACকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AY=CY.

প্রমাণ : ∵ XY ∥ BC, ∴ $\frac{AX}{BX}=\frac{AY}{CY}$, কিন্তু AX=BX (স্বীকার)

∴ AY=CY.

উদা. 3. একটি ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা উহার সমান্তরাল বাহু দুইটির সমান্তরাল হইবে। [C. U. '37, '41, '44]

মনে কর, ABDC ট্রাপিজিয়মের AC ও BD তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু P ও Q যোগ করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ রেখা AB ও CDর সমান্তরাল। CA ও DBকে বর্ধিত করিয়া X বিন্দুতে ছেদ করান হইল।



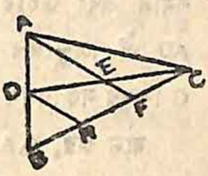
১২নং চিত্র

প্রমাণ : △XDCএ AB ∥ CD,

∴ $\frac{XA}{AC}=\frac{XB}{BD}$, বা, $\frac{XA}{2AP}=\frac{XB}{2BQ}$, বা, $\frac{XA}{AP}=\frac{XB}{BQ}$, ∴ AB ∥ PQ.

আবার, $\because$ AB ∥ CD, $\therefore$ PQ ∥ CD, $\therefore$ PQ ∥ AB ও CD.

উদা. 4. ABC ত্রিভুজে AB বাহু D বিন্দুতে এবং CD সরলরেখা E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। যদি বর্ধিত AE, BCকে F বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $FC=\frac{1}{3}BC$ হইবে।



১৩নং চিত্র

AB বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং CDর মধ্যবিন্দু E, বর্ধিত AB রেখা BCকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। DR ∥ AF টান, উহা BCকে R বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $FC=\frac{1}{3}BC$.

প্রমাণ : $\triangle$ABFএর DR ∥ AF,

$\therefore \frac{BD}{DA}=\frac{BR}{RF}$, কিন্তু DB = DA. $\therefore$ BR = RF.

আবার, $\triangle$CDRএর EF ∥ DR, $\therefore$ CE : DE = CF : RF,

কিন্তু CE = DE, $\therefore$ CF = RF, $\therefore$ CF = RF = BR, $\therefore$ $FC=\frac{1}{3}BC$.

উদা. 5. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কিরূপে সমান তিন অংশে বিভক্ত করা যায়? [C. U. '29]

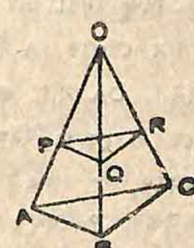
[**Hints :** মনে কর, AB সরলরেখাকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করিতে হইবে। ABর সহিত কোন কোণ করিয়া AX সরলরেখা টান এবং AX হইতে যে কোন তিনটি সমান অংশ AP, PQ, QR কাটিয়া লও। RB যোগ করিয়া P ও Q বিন্দু হইতে RBর সমান্তরাল করিয়া সরলরেখা টান। উহারা যেন, ABকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন AB, C ও D বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত হইল।

$\because$ PC ∥ RB. $\therefore$ AC : AB = AP : AR = 1 : 3 $\therefore$ $AC=\frac{1}{3}AB$.

অনুরূপে CD ও DB প্রত্যেকে $\frac{1}{3}$AB হইবে।]

উদা. 6. OPA, OQB ও ORC তিনটি সরলরেখা এরূপভাবে অঙ্কিত যে, PQ ∥ AB ও QR ∥ BC, এবং P, Q, R অথবা A, B, C এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে। প্রমাণ কর যে, PR ∥ AC. [C. U. '47]

যাহা দেওয়া আছে এবং কি প্রমাণ করিতে হইবে তাহা আগে লিখিবে।]



১৪নং চিত্র

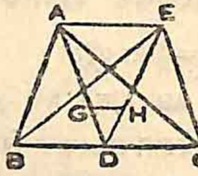
এখানে $\because$ PQ ∥ AB, $\therefore$ $\frac{OP}{AP}=\frac{OQ}{BQ}$.

আবার, $\because$ QR ∥ BC, $\therefore$ $\frac{OQ}{BQ}=\frac{OR}{CR}$.

$\therefore$ $\frac{OP}{AP}=\frac{OR}{CR}$ $\therefore$ PR ∥ AC.

উদা. 7. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর অবস্থিত এবং নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '34, '42, '43, '45]

মনে কর, $\triangle$ABCর ভূমি BC প্রদত্ত নির্দিষ্ট ভূমির সমান এবং উহার ক্ষেত্রফল প্রদত্ত ক্ষেত্রফলের সমান। AD ঐ ত্রিভুজের একটি মধ্যমা ও G উহার ভরকেন্দ্র। G বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।



১৫নং চিত্র

মনে কর, $\triangle$ABCর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট অন্য একটি $\triangle$EBC একই BC ভূমির উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং উহার ভরকেন্দ্র H ; GH ও AE যোগ কর।

$\because$ একই ভূমির উপর একই দিকে $\triangle$ABC ও $\triangle$EBC সমান, $\therefore$ AE $\parallel$ BC.

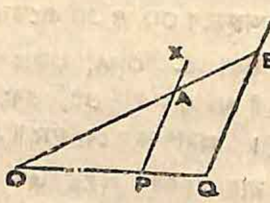
আবার $\because$ ভরকেন্দ্রে প্রত্যেক মধ্যমা সমত্রিখণ্ডিত হয়, $\therefore \frac{DG}{DA}=\frac{1}{3}$

এবং $\frac{DH}{DE}=\frac{1}{3}$, $\therefore \frac{DG}{AD}=\frac{DH}{DE}$, $\therefore$ GH $\parallel$ AE, $\therefore$ GH $\parallel$ BC.

অতএব, $\triangle$ABCর A বিন্দুর যে কোন অবস্থানে ভরকেন্দ্র G বিন্দু GH সরলরেখার উপর থাকিবে। $\therefore$ G বিন্দুর মধ্য দিয়া BCর সমান্তরাল সরলরেখাই G বিন্দুর সঞ্চারপথ।

উদা. 8. একটি নির্দিষ্ট O বিন্দুতে OPQ সরলরেখা এরূপে টানা হইয়াছে যে OP : OQ ধ্রুবক। P-এর সঞ্চারপথ যদি একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হয়, তবে Q-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '27]

মনে কর, O নির্দিষ্ট স্থিরবিন্দুতে OPQ সরলরেখা এরূপে টানা হইয়াছে যে, OP : OQ = ধ্রুবক। যদি P বিন্দু সর্বদা PX এই নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর বিচরণ করে, তবে Q বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।



১৬নং চিত্র

Q বিন্দু দিয়া QY $\parallel$ PX টান। মনে কর, PX রেখার A বিন্দু Pএর একটি অবস্থান। OA যোগ করিয়া বর্ধিত কর। উহা যেন QYকে B বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, $\because$ PA $\parallel$ QB, $\therefore$ OA : OB = PO : OQ = ধ্রুবক।

অতএব, P বিন্দুর অবস্থান A বিন্দুতে হইলে, তখন Q বিন্দুর অবস্থান QY-এর উপর B বিন্দুতে হইবে। $\therefore$ Q বিন্দু দিয়া অঙ্কিত PXএর সমান্তরাল সরলরেখাই Q বিন্দুর সঞ্চারপথ।

Exercise 2

1. ABC ত্রিভুজে BCর সমান্তরাল PQ সরলরেখা অপর বাহুদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি AB=4·2 সে. মি. ; AC=3·6 সে. মি. ও AP=6·3 সে. মি. হয়, তবে AQ-এর দৈর্ঘ্য কত ? [উত্তর : 5·4 সে. মি.]

2. কোন সমান্তরাল সরলরেখাশ্রেণী উহাদের যে-কোন দুই ছেদককে সমানুপাতে ছেদ করে।

3. ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা উহার তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।

4. ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E এবং বর্ধিত BE, ACকে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $AF=\frac{1}{3}AC$.

5. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার উপর P ও Q যে-কোন দুইটি বিন্দু। PQ একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে X বিন্দুতে বিভক্ত হইয়াছে। X-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

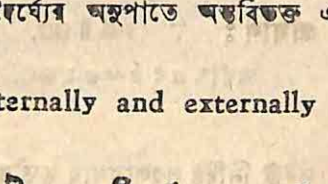
6. ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয় সাধারণ ভূমি BCর একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং BCর উপরিস্থ যে-কোন E বিন্দু হইতে অঙ্কিত BA ও BDর সমান্তরাল রেখাদ্বয় AC ও DCকে যথাক্রমে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, FG ∥ AD. [G. U. '51]

সম্পাদ্য 1

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে দুইটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত এবং বহির্বিভক্ত করিতে হইবে।

[To divide a given straight line internally and externally in the ratio of two given straight lines.]

মনে কর, AB সরলরেখাকে প্রদত্ত a ও b দৈর্ঘ্যদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করিতে হইবে।



অঙ্কন : ABর সহিত কোন কোণ করিয়া একটি রেখা AX টান। AX হইতে $AC=a$,

১৭নং চিত্র

$CD=b$ এবং CA হইতে $CD'=b$ কাটিয়া লও। DB যোগ করিয়া DBর সমান্তরাল CP টান, উহা যেন ABকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে P বিন্দুতে AB রেখা $a:b$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইল। আবার, D'B যোগ করিয়া CQ ∥ D'B টান, উহা যেন AB-র বর্ধিতাংশকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। AB রেখা Q বিন্দুতে $a:b$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : ∵ $\triangle ABD$তে $CP \parallel DB$, ∴ $AP : PB = AC : CD = a : b$.

আবার ∵ $\angle ABD'$এ $CQ \parallel D'B$, ∴ $AQ : QB = AC : CD' = a : b$.

[দ্রষ্টব্য : এইরূপে যে-কোন সরলরেখাকে যে-কোন অনুপাতে বিভক্ত করা যায়। 3 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করিতে হইলে, AC=3 দৈর্ঘ্য একক এবং CD=2 দৈর্ঘ্য একক লইতে হইবে।]

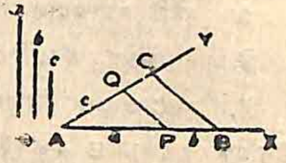
সম্পাদ্য 2

তিনটি নির্দিষ্ট সরলরেখার চতুর্থ সমানুপাতী অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct the fourth proportional to three given straight lines.]

মনে কর, a, b ও c তিনটি প্রদত্ত সরলরেখা। ইহাদের দৈর্ঘ্যের চতুর্থ সমানুপাতী একটি সরলরেখা অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AX যে-কোন একটি সরলরেখা লও। উহা হইতে $AP = a$ এবং $PB = b$ কাটিয়া লও। AXএর সহিত কোন কোণ করিয়া একটি সরলরেখা AY টান এবং উহা হইতে $AQ = c$ কাটিয়া লও। PQ যোগ করিয়া B বিন্দু হইতে PQএর সমান্তরাল করিয়া BC টান, উহা যেন AYকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে QC নির্ণেয় চতুর্থ সমানুপাতী হইল।



১৮নং চিত্র

প্রমাণ : ∵ $PQ \parallel BC$, ∴ $AP : PB = AQ : QC$,

অর্থাৎ $a : b = c : QC$. ∴ QC দৈর্ঘ্য a, b ও cর চতুর্থ সমানুপাতী।

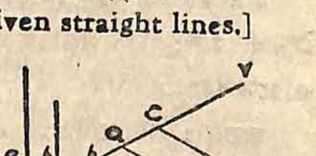
সম্পাদ্য 3

দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার তৃতীয় সমানুপাতী অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To find a third proportional to two given straight lines.]

মনে কর, a ও b দুইটি সরলরেখা। ইহাদের তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন : যে-কোন সরলরেখা AX লও। উহা হইতে $AP = a$ এবং $PB = b$ কাটিয়া লও। AXএর সহিত কোন কোণ করিয়া অন্য যে কোন একটি সরলরেখা AY টান এবং উহা হইতে $AQ = b$ কাটিয়া লও। PQ যোগ কর। $BC \parallel PQ$ টান, উহা যেন AY-কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে QC নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী হইল।



১৯নং চিত্র

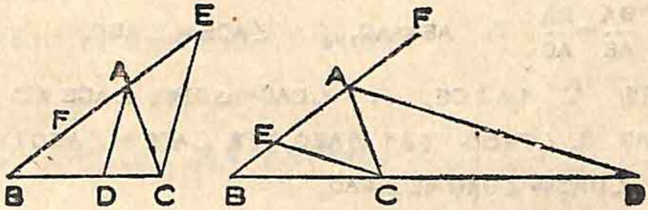
প্রমাণ : ∵ $PQ \parallel BC$, ∴ $AP : PB = AQ : QC$,

অর্থাৎ $a : b = b : QC$ ∴ QC দৈর্ঘ্য, a ও bএর তৃতীয় সমানুপাতী।

উপপাদ্য 5

ত্রিভুজের কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বা বহির্দ্বিখণ্ডক ঐ কোণের বিপরীত বাহুকে অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করে।

[The internal or external bisector of an angle of a triangle divides the opposite side internally or externally in the ratio of the other two sides.]



২০নং চিত্র

ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার BAC কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক AD রেখা BCকে D বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে, এবং ঐ কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক AD রেখা BCর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে বহির্বিভক্ত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে BD : DC=AB : AC.

অঙ্কন : C বিন্দু হইতে DAর সমান্তরাল করিয়া CE রেখা টান। উহা যেন BA বা BA-র বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : $\because$ DA ∥ CE, $\therefore$ ∠DAC=একান্তর ∠ACE

এবং ∠BAD বা ∠FAD=অনুরূপ ∠AEC ;

কিন্তু ∠FAD=∠CAD, $\therefore$ ∠ACE=∠AEC, $\therefore$ AC=AE.

এক্ষণে, $\because$ DA ∥ CE.

$\therefore$ BD : DC=AB : AE=AB : AC [$\because$ AE=AC]

উপপাদ্য 6

যদি ত্রিভুজের কোন শীর্ষ হইতে অঙ্কিত সরলরেখা বিপরীত বাহুকে অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করে, তবে ঐ সরলরেখাটি ঐ শীর্ষস্থ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বা বহির্দ্বিখণ্ডক হইবে।

[If a straight line drawn from an angle of a triangle divides the opposite side internally or externally in the ratio of the other two sides, then the straight line is the internal or external bisector of the angle.]

[পূর্ব উপপাদ্যের চিত্র আঁক] মনে কর, ABC ত্রিভুজের A বিন্দু হইতে অঙ্কিত AD সরলরেখা BC বা বর্ধিত BC বাহুকে এরূপে ছেদ করিয়াছে যে,

BD : DC = BA : AC. প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD রেখা BAC কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বা বহির্দ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন : DAর সমান্তরাল CE রেখা টান, উহা যেন BA বা বর্ধিত BAকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : $\because$ DA = CE, $\therefore$ $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE}$; কিন্তু $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AC}$ (স্বীকার),

$\therefore$ $\frac{BA}{AE}=\frac{BA}{AC}$ $\therefore$ AE = AC, $\therefore$ $\angle ACE=\angle AEC$.

আবার, $\because$ DA ∥ CE, $\therefore$ $\angle DAC$ = একান্তর $\angle ACE$ এবং

$\angle BAD$ বা, $\angle FAD$ = অনুরূপ $\angle AEC$, কিন্তু $\angle ACE=\angle AEC$ (প্রমাণিত).

$\therefore$ $\angle DAC=\angle BAD$ বা $\angle FAD$.

$\therefore$ AD রেখা BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

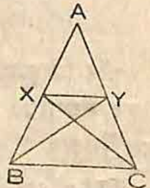
[**দ্রষ্টব্য :** যদি কোন সরলরেখা এরূপভাবে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয় যে তাহাদের অংশদ্বয়ের অনুপাত সমান, তবে সরলরেখাটি সমঞ্জসভাবে (harmonically) বিভক্ত হইয়াছে বলা হয়।]

বিবিধ সমাধান (3)

উদা. 1. কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি XY ভূমির সমান্তরাল হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। [C. U. '39 Sup.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ ও $\angle C$এর সমদ্বিখণ্ডক BY ও CX বিপরীত বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে Y ও X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং XY ∥ BC.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু।



২১নং চিত্র

প্রমাণ : $\because$ $\angle ABC$এর সমদ্বিখণ্ডক BY, $\therefore$ $\frac{AB}{BC}=\frac{AY}{CY}$.

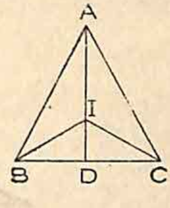
অনুরূপে, $\because$ CX, $\angle ACB$এর সমদ্বিখণ্ডক $\therefore$ $\frac{AC}{BC}=\frac{AX}{BX}$.

আবার, $\because$ XY ∥ BC (স্বীকার), $\therefore$ $\frac{AX}{BX}=\frac{AY}{CY}$.

অতএব, $\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{BC}$, $\therefore$ AB = AC. $\therefore$ $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু।

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু। [C. U. '14 ; W.B.S.F. '52 ; D. B. '30, '44]

মনে কর, △ABCর ∠B ও ∠C কোণের সমদ্বিখণ্ডক BI ও CI পরস্পর I-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AI যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে AI রেখা BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।



২২ নং চিত্র

AI-কে বর্ধিত করিয়া BCকে D বিন্দুতে ছেদ কর।

প্রমাণ : △ABDতে ∵ △Bএর সমদ্বিখণ্ডক BI, ∴ $\frac{AB}{BD}=\frac{AI}{DI}$.

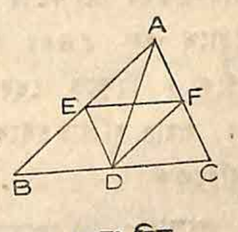
△ADCতে ∵ ∠Cএর সমদ্বিখণ্ডক CI, ∴ $\frac{AC}{CD}=\frac{AI}{DI}$.

∴ $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}$, ∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$, ∴ AI, ∠BACএর সমদ্বিখণ্ডক।

∴ ত্রিভুজের কোণ তিনটির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

উদা. 3. △ABCর AD একটি মধ্যমা এবং ADB ও ADC কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে EF ∥ BC. [C. U. '42 ; D. B. '51 ; G. U. '48]

[যাহা যাহা স্বীকার করা আছে তাহা আগে লিখিয়া লও।] EF যোগ কর।



২৩নং চিত্র

প্রমাণ : ∵ DE, ∠ADBর সমদ্বিখণ্ডক,

∴ $\frac{AE}{BE}=\frac{AD}{BD}$.

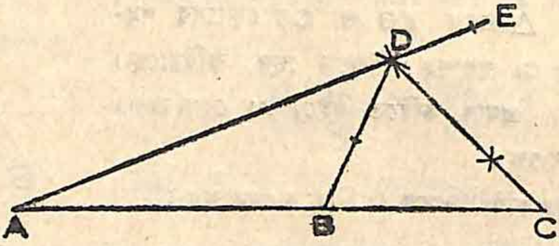
আবার, ∵ DF, ∠ADCর সমদ্বিখণ্ডক,

∴ $\frac{AF}{CF}=\frac{AD}{DC}=\frac{AD}{BD}$ (∵ BD = CD), ∴ $\frac{AE}{BE}=\frac{AF}{FC}$, ∴ EF ∥ BC.

উদা. 4. 4 সেন্টিমিটার দীর্ঘ AB সরলরেখা টানিয়া উহাকে 5 : 2 অনুপাতে C বিন্দুতে বহির্বিভক্ত কর। [E.B.S.B. '49]

4 সেন্টিমিটারের সমান AB সরলরেখা লও। Aকে কেন্দ্র করিয়া 5 সে. মি. ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক এবং Bকে কেন্দ্র করিয়া 2 সে. মি. ব্যাসার্ধ

লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ আঁক। চাপ দুইটি যেন D বিন্দুতে ছেদ করিল। AD ও BD যোগ কর। ∠ADBর বহির্দ্বিখণ্ডক (অর্থাৎ ∠BDEএর অন্তর্দ্বিখণ্ডক) DC আঁক,



২৪নং চিত্র

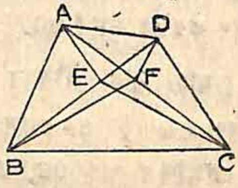
উহা যেন ABর বর্ধিতাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে AB রেখা C বিন্দুতে উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : ∵ ∠ADBর বহির্দ্বিখণ্ডক DC,

∴ AC : BC = AD : DB = 5 : 2.

উদা. 5. ABCD চতুর্ভুজের A ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় BD কর্ণের উপর মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে B ও D কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি AC কর্ণের উপর মিলিত হইবে। [C. U. '33 ; G. U. '50]

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের ∠A ও ∠Cর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় BD কর্ণের উপর E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে এবং ∠Bএর সমদ্বিখণ্ডক BF যেন AC কর্ণকে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। DF যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, DF রেখা ∠ADCর সমদ্বিখণ্ডক।



২৫নং চিত্র

প্রমাণ : △ABDতে ∠BADএর সমদ্বিখণ্ডক AE, ∴ AB : AD = BE : DE.

△BCDতে CE রেখা ∠BCDর সমদ্বিখণ্ডক, ∴ BC : DC = BE : DE,

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$, $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$.

আবার, ∵ BF রেখা ∠ABCর সমদ্বিখণ্ডক, ∴ $\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{CF}$.

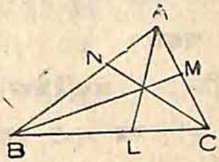
সুতরাং $\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{CF}$, ∴ DF রেখা ∠ADCর সমদ্বিখণ্ডক।

উদা. 6. ABC ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় BC, CA, AB বাহুকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে BL.CM.AN=LC.MA.NB. [C. U. '56]

(যাহা স্বীকার করা আছে তাহা আগে লিখ)

∵ ∠Aর সমদ্বিখণ্ডক AL, ∴ $\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}\cdots(1)$

∵ BM, ∠Bর সমদ্বিখণ্ডক, ∴ $\frac{CM}{AM}=\frac{BC}{AB}\cdots(2)$



অনুরূপ $\frac{AN}{BN}=\frac{AC}{BC}\ldots(3)$.

২৬নং চিত্র

এক্ষণে (1), (2) ও (3) গুণ করিয়া পাই

$\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{AM}\cdot\frac{AN}{BN}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1$, ∴ BL.CM.AN=LC.MA.NB.

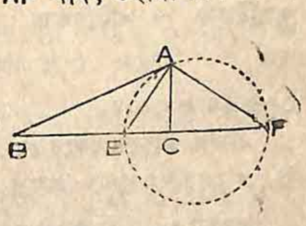
উদা. 7. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন গতিশীল বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত যদি ধ্রুবক হয়, তবে প্রমাণ কর যে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে। [C. U. '44, '49 ; D. B. '33, '45]

[অথবা, কোন ত্রিভুজের ভূমি এবং অপর বাহুদ্বয়ের অনুপাত নির্দিষ্ট আছে। উহার শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।]

মনে কর, B ও C দুইটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু এবং A এরূপ একটি গতিশীল বিন্দু যে ইহার সর্ব অবস্থানে AB : AC=ধ্রুবক (নির্দিষ্ট অনুপাত)।

প্রমাণ করিতে হইবে যে A বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

অঙ্কন : ∠BACর অন্তর্দ্বিখণ্ডক AE ও বহির্দ্বিখণ্ডক AF আঁক, উহারা যেন BCকে E ও F বিন্দুতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করিল।



প্রমাণ : ∵ AE ও AF, ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক,

∴ $\frac{BE}{CE}=\frac{BF}{CF}=\frac{AB}{AC}$=নির্দিষ্ট অনুপাত।

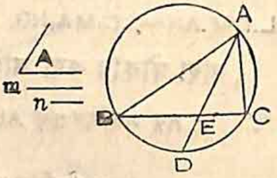
২৭নং চিত্র

সুতরাং BC রেখা E ও F বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। এখন, B ও C স্থির বিন্দু বলিয়া E ও F দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইবে। আবার, AE ও AF একই কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক বলিয়া ∠EAF=এক সমকোণ। ∴ A বিন্দুতে EFএর সম্মুখকোণ সর্বদা এক সমকোণ হইবে। অতএব, EF-কে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তই A বিন্দুর সঞ্চারপথ।

[দ্রষ্টব্য : এই বৃত্তকে Circle of Apollonius বলে।]

উদা. ৪. একটি ত্রিভুজের ভূমি, শীর্ষকোণ এবং অপর দুই বাহুর অনুপাত দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

মনে কর, ত্রিভুজটির ভূমি BC, শীর্ষকোণ A এবং AB : AC $= m : n$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।



২৮নং চিত্র

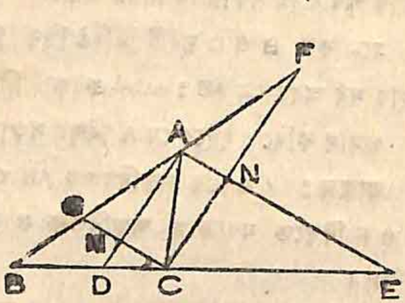
অঙ্কন : BC ভূমিকে $m : n$ অনুপাতে E বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত কর। BC-র উপর ∠A ধারণক্ষম ABC বৃত্তাংশ আঁক এবং বৃত্তটিকে সম্পূর্ণ কর। ABC চাপের অনুবন্ধী চাপকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। DE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও AC যোগ কর। ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : ∵ চাপ BD = চাপ CD, ∴ ∠BAD = ∠CAD,

∴ AE রেখা ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক। ∴ AB : AC = BE : CE $= m : n$, এবং অঙ্কন অনুসারে ∠BAC = প্রদত্ত ∠A.

উদা ৭. যদি BC সরলরেখা D ও E বিন্দুতে একই অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয় এবং BC-র বহির্ভূত কোন বিন্দু Aতে যদি DEর সম্মুখকোণ সমকোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, AD ও AE যথাক্রমে AB ও ACর অন্তর্ভূত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক হইবে।

মনে কর, BC সরলরেখা D ও E বিন্দুতে একই অনুপাতে (ধর $m : n$ অনুপাতে) যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হইয়াছে এবং A বিন্দুতে DEর সম্মুখকোণ DAE এক সমকোণ।



২৯নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে AD ও AE যথাক্রমে BAC কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন : C বিন্দু হইতে CG ∥ EA ও CF ∥ DA টান, উহারা যেন BA ও বর্ধিত BAকে যথাক্রমে G ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : △BCFএ, ∵ DA ∥ CF, ∴ BA : AF = BD : DC.

আবার, △BGCতে ∵ AE ∥ GC, ∴ BE : CE = BA : GA.

কিন্তু BD : DC = BE : CE (স্বীকার),

∴ $\frac{BA}{AF} = \frac{BA}{AG}$ ∴ AF = AG.

এক্ষণে, ∵ ক্ষেত্র AMCN একটি সামান্তরিক এবং ∠DAE সমকোণ

∴ ∠GCF এক সমকোণ। △GCFএর অতিভুজ GFএর মধ্যবিন্দু A বলিয়া

GA=AF=AC, ∴ ∠AGC=∠ACG=∠CAE (একান্তর)।

আবার, ∵ CG ∥ EA, ∴ ∠FAE=অনুরূপ ∠AGC.

∴ ∠FAE=∠CAE, ∴ AE রেখা ∠CAF-এর সমদ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ AE, ∠BACর বহির্দ্বিখণ্ডক।

আবার, ∠GAD=∠AFC=∠ACF (∵ AC=AF)=একান্তর ∠CAD ;

∴ AD রেখা ∠BACর অন্তর্দ্বিখণ্ডক।

অতএব, AD ও AE যথাক্রমে ∠BACর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক হইল।

Exercise 3

1. উপপাদ্য 5এর সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

2. ত্রিভুজের দুইটি কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক ও তৃতীয় কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

3. ত্রিভুজের ভূমিটি শীর্ষকোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডকের দ্বারা সমঞ্জসভাবে বিভক্ত হয়।

[দ্রষ্টব্য : যদি কোন সরলরেখা একই অনুপাতে অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থভাবে বিভক্ত হয়, তবে উহাকে সমঞ্জসভাবে (harmonically) বিভক্ত হইয়াছে বলা হয়।]

4. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। যদি BC=CD হয়, তবে প্রমাণ কর যে BA : AD=BO : DO.

5. ABC ত্রিভুজে, BC বাহুর মধ্যবিন্দু X এবং AXB ও AXC কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক XE ও XF বর্ধিত AB ও ACকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে EF ∥ BC. [C U. '39]

6. ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র I এবং বর্ধিত AI ভূমি BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, AI : ID=AB+AC : BC.

7. △ABC-এর A কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় BCকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি BCর মধ্যবিন্দু X হয়, তবে XC^2=PX.QX হইবে।

8. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের B ও C কোণের প্রত্যেকটি A কোণের দ্বিগুণ এবং ∠Cএর সমদ্বিখণ্ডক AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে AB, BC ও BD সমানুপাতী।

9. AB সরলরেখা C ও D বিন্দুতে একই $m : n$ অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হইয়াছে এবং CD-কে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তের পরিধিস্থ Q কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে QA : QB=$m : n$.

সদৃশ ত্রিভুজ (Similar triangles)

6. **সদৃশকোণী ত্রিভুজ** (Equiangular triangles): কোন একটি ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে অন্য একটি ত্রিভুজের কোণগুলির সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলে। সুতরাং বুঝা গেল যে দুইটি করিয়া কোণ সমান জানা থাকিলেই ত্রিভুজদ্বয়কে সদৃশকোণী বলা যাইবে, কারণ তাহাদের তৃতীয় কোণগুলি অবশ্যই সমান হইবে।

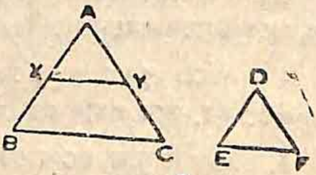
7. **সদৃশ ত্রিভুজ** (Similar triangles): যদি দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হয় এবং তাহাদের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাতত্রয় সমান হয়, তবে তাহাদিগকে সদৃশ ত্রিভুজ বলে। যে কোণ যে-কোণের সহিত সমান, তাহাদের বিপরীত বাহুগুলিকে অনুরূপ বাহু ধরিতে হয়।

দ্রষ্টব্য: দুইটি বহুভুজও ঠিক অনুরূপ কারণে পরস্পর সদৃশকোণী ও সদৃশ হইয়া থাকে।

উপপাদ্য 7

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হইলে তাহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হইবে।

[If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional.]



৩০নং চিত্র

ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

অঙ্কন: AB ও AC হইতে DE ও DF-এর সমান করিয়া যথাক্রমে AX ও AY অংশ কাটিয়া লও। XY যোগ কর।

প্রমাণ: $\triangle AXY$ ও $\triangle DEF$-এর $AX = DE$, $AY = DF$ এবং অন্তর্ভূত $\angle A =$ অন্তর্ভূত $\angle D$, $\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore \quad \angle AXY = \angle DEF = \angle ABC$ (স্বীকার);

$\therefore \quad XY \parallel BC, \quad \therefore \quad \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$ অর্থাৎ, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.

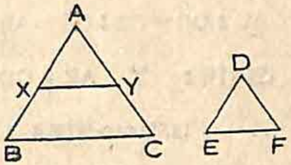
অনুরূপে BA ও BC হইতে যথাক্রমে ED ও EF-এর সমান অংশ কাটিয়া লইয়া প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$. $\therefore \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BD}{EF}$.

উপপাদ্য 8

(উপপাদ্য 7-এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা)

দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে সমানুপাতী হইলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হইবে।

[If two triangles have their sides proportional, when taken in order, they are equiangular.]



৩১নং চিত্র

স্বীকার : ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহারা সদৃশকোণী অর্থাৎ $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$ এবং $\angle C=\angle F$.

অঙ্কন : AB হইতে DEর সমান AX এবং AC হইতে DF-এর সমান AY অংশ কাটিয়া লও। XY যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ (স্বীকার), $\therefore$ $\frac{AB}{AX}=\frac{AC}{AY}$, $\therefore$ XY ∥ BC.

$\therefore$ $\angle B=$অনুরূপ $\angle AXY$ এবং $\angle C=$অনুরূপ $\angle AYX$.

$\therefore$ ABC ও AXY ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

$\therefore$ $\frac{AB}{AX}=\frac{BC}{XY}$, কিন্তু $\frac{AB}{AX}=\frac{AB}{DE}$ ($\because$ AX=DE) $=\frac{BC}{EF}$ (স্বীকার),

$\therefore$ $\frac{BC}{XY}=\frac{BC}{EF}$, $\therefore$ XY=EF.

এক্ষণে, AXY ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের AX=DE, AY=DF এবং XY=EF.

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $\angle AXY=\angle E$, $\angle AYX=\angle F$.

$\therefore$ $\angle B=\angle AXY=\angle E$ এবং $\angle C=\angle AYX=\angle F$,

সুতরাং অবশিষ্ট $\angle A$ এবং $\angle D$ সমান।

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশকোণী।

বিবিধ সমাধান (4)

উদা. 1. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হইবে।

[চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর, $\triangle ABC$র AB বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু E. DE যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, DE ∥ BC এবং $DE=\frac{1}{2}BC$.

প্রমাণ : $\because$ D ও E যথাক্রমে AB ও ACর মধ্যবিন্দু,

$\therefore$ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$, $\therefore$ DE ∥ BC (প্রমাণিত হইল)। আবার, $\because$ DE ∥ BC,

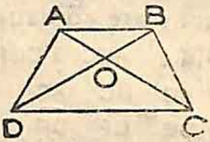
$\therefore$ $\angle ADE=\angle B$ এবং $\angle AED=\angle C$, সুতরাং $\triangle ADE$ ও $\triangle ABC$ সদৃশকোণী

$\therefore$ $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$ ($\because$ $AD=\frac{1}{2}AB$), $\therefore$ $DE=\frac{1}{2}BC$.

উদা. 2. ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ∥ CD এবং উহার কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, OA : OC = OB : OD = AB : CD. [C. U. '46]

ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ∥ DC এবং AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AO : OC = OB : OD = AB : DC.



৩২নং চিত্র

প্রমাণ : ∵ AB ∥ DC,

∴ ∠BAD = একান্তর ∠OCD এবং

∠ABO = একান্তর ∠ODC. ∴ △AOB ও △DOC সদৃশকোণী।

∴ AO : OC = OB : OD = AB : DC.

উদা. 3. কোন বৃত্তের অন্তঃস্থ X বিন্দু দিয়া AB ও CD দুইটি জ্যা টানিয়া AC ও BD যোগ করা হইল। প্রমাণ কর যে, AX : DX = CX : BX. [D.B. '40]

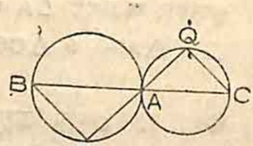
(নিজে চিত্র আঁকিয়া যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখ।)

প্রমাণ : একই BC চাপের উপর পরিধিস্থ ∠A = ∠D, এবং ∠AXC = বিপ্রতীপ ∠DXB, সুতরাং △ACX ও △DBX সদৃশকোণী।

∴ AX : DX = CX : BX.

উদা. 4. দুইটি বৃত্ত পরস্পর A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত PQ সরলরেখা বৃত্তদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, বৃত্ত দুইটির ব্যাসদ্বয়ের অনুপাত = AP : AQ হইবে।

মনে কর, বৃত্ত দুইটি A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। A বিন্দু দিয়া PQ সরলরেখা টানা হইয়াছে, উহা যেন বৃত্ত দুইটির পরিধিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB ও AC ব্যাস টান। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB : AC = AP : AQ. BP ও CQ যোগ কর।



৩৩নং চিত্র

প্রমাণ : ∵ বৃত্তদ্বয় A বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে, ∴ উহাদের কেন্দ্রদ্বয় ও A বিন্দু এক সরলরেখায় অবস্থিত, অর্থাৎ AB ও AC এক সরলরেখায় অবস্থিত।

এক্ষণে, ∠P ও ∠Q অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ,

এবং ∠BAP = বিপ্রতীপ ∠QAC, ∴ △ABP ও ∠AQC সদৃশকোণী।

∴ AB : AC = AP : AQ.

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিসীমাদ্বয় উহাদের যে-কোন দুইটি বাহুর সমানুপাতী। [C. U. '46]

[চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের AB, AC ও BC বাহু যথাক্রমে DE, DF ও EF বাহুর অনুরূপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{\triangle ABC\text{এর পরিসীমা}}{\triangle DEF\text{এর পরিসীমা}}=\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$.

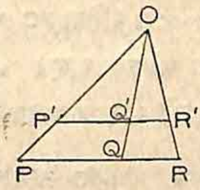
প্রমাণ : ∵ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ, ∴ $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$

∴ সংযোজনক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{AB+AC+BC}{DE+DF+EF}=\frac{\triangle ABC\text{এর পরিসীমা}}{\triangle DEF\text{এর পরিসীমা}}।$$

উদা. 6. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা OP, OQ, OR সরলরেখা তিনটিকে যথাক্রমে P, Q, R এবং P′, Q′, R′ বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, PQ : QR = P′Q′ : Q′R′. [C. U. '41, E. B. S. B. '51, G. U. '50]

(যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখ)



৩৪নং চিত্র

প্রমাণ : ∵ P′Q′ ∥ PQ. ∴ ∠OP′Q′ = ∠F ও ∠OQ′P′ = ∠OQP, ∴ △OP′Q′ ও △OPQ সদৃশকোণী [∵ ∠O সাধারণ]। ∴ $\frac{P'Q'}{PQ}=\frac{OQ'}{OQ}$.

অনুরূপে, $\frac{OQ'}{OQ}=\frac{Q'R'}{QR}$ (∵ △OQ′R′ ও △OQR সদৃশকোণী।)

∴ $\frac{P'Q'}{PQ}=\frac{Q'R'}{QR}$, ∴ একান্তর ক্রিয়া দ্বারা $\frac{P'Q'}{Q'R'}=\frac{PQ}{QR}$.

উদা. 7. ত্রিভুজের ভূমির সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখা ঐ ভূমির সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়। [C. U. '41]

[৩৪নং চিত্র দেখ।] মনে কর, △OPR-এর মধ্যমা OQ এবং P′R′ সরলরেখা PR-এর সমান্তরাল। P′R′ যেন OQ-কে Q′ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, P′Q′ = Q′R′.

প্রমাণ : [উদা. 6-এর মত প্রথমে প্রমাণ কর যে, $\frac{P'Q'}{Q'R'}=\frac{PQ}{QR}$.

এক্ষণে, ∵ PQ = QR (স্বীকার), ∴ P′Q′ = Q′R′.

উদা. 8. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ও DC বাহুকে বর্ধিত করায় বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, PB : PD = PC : PA.

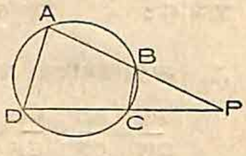
[C. U. '11, '48 ; E. B. S. B. '48]

[যাহা দেওয়া আছে, তাহা আগে লিখিবে]

প্রমাণ : $\because$ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB বাহুকে বর্ধিত করা হইয়াছে,
$\therefore$ বহিঃস্থ ∠PBC = অন্তঃস্থ বিপরীত ∠D.

এখন △BFC ও △APDর ∠P সাধারণ এবং ∠PBC = ∠D. সুতরাং অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, $\therefore$ $\frac{PB}{PD}=\frac{PC}{PA}$.



৩৫নং চিত্র

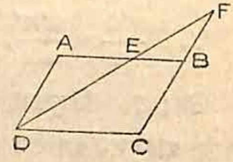
[**দ্রষ্টব্য :** সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান হয়। আর, যে যে কোণ সমান তাহাদের বিপরীত বাহুই অনুরূপ বাহু হয়। এখানে ∠PBC = ∠D বলিয়া FC ও AP অনুরূপ বাহু হইল এবং ∠BCP = ∠A বলিয়া PB ও PD অনুরূপ বাহু। যে ত্রিভুজের আগে উল্লেখ করিবে অনুপাত লিখিবার সময় তাহারই বাহুকে আগে লিখিতে হইবে।]

উদা. 9. ABCD সামান্তরিকের D বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানা হইল এবং উহা ABকে E বিন্দুতে ও বর্ধিত CBকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, DA : AE = BF : BE = CF : CD.

[C. U. '38]

(যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখিয়া লও)

প্রমাণ : ∠AED = বিপ্রতীপ ∠BEF এবং ∠A = একান্তর ∠EBF, $\therefore$ তৃতীয় কোণদ্বয় সমান, △ADE ও △BEF সদৃশকোণী।



$\therefore$ $\frac{AD}{BF}=\frac{AE}{BE}$, $\therefore$ একান্তর ক্রিয়া দ্বারা $\frac{AD}{AE}=\frac{BF}{BE}$.

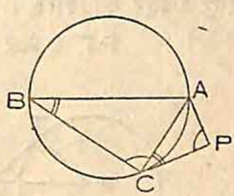
৩৬নং চিত্র

আবার, △BEF ও △FDC সদৃশকোণী ($\because$ ∠FEB = অনুরূপ ∠FDC, এবং ∠EBF = অনুরূপ ∠C),

$\therefore$ $\frac{FB}{FC}=\frac{BE}{DC}$, $\therefore$ $\frac{BF}{BE}=\frac{FC}{CD}$. অতএব, $\frac{AD}{AE}=\frac{BF}{BE}=\frac{CF}{CD}$.

উদা. 10. কোন বৃত্তের যে কোন জ্যা-এর এক প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শকের উপর অপর প্রান্তবিন্দু হইতে লম্ব টানিলে ঐ জ্যা, বৃত্তের ব্যাস ও ঐ লম্বের মধ্যসমানুপাতী হইবে। [C. U. '20]

মনে কর, AC প্রদত্ত বৃত্তের একটি জ্যা, বৃত্তটির C বিন্দুতে PC একটি স্পর্শক এবং AP⊥PC. A বিন্দু দিয়া AB ব্যাস টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AP}$ (বা $AC^2=AB.AP$)। BC যোগ কর।



৩৭নং চিত্র

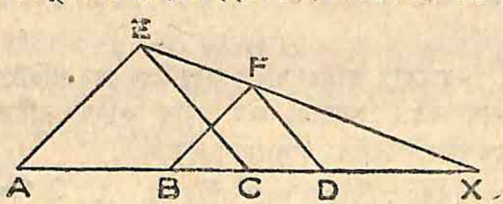
প্রমাণ : ∠ACB অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ এবং ∠P সমকোণ।

∵ PC একটি স্পর্শক এবং CA স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা, ∴ ∠ACP=একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠B. অতএব, △ABC ও △APC সদৃশকোণী, ∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AP}$.

উদা. 11. কোন সরলরেখার উপর A, B, C ও D পর পর চারিটি বিন্দু। ঐ রেখার উপর এরূপ একটি X বিন্দু নির্ণয় কর যেন XA : XB=XC : XD হয়।

[C. U. '42 ; E. B. S. B. '50]

মনে কর, A, B, C ও D বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত। ঐ সরলরেখার উপর এমন একটি X বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যেন XA : XB=XC : XD হয়।



৩৮নং চিত্র

অঙ্কন : ACর উপর যে কোন ত্রিভুজ AEC আঁক। B বিন্দু হইতে AEর সমান্তরাল এবং D বিন্দু হইতে CEর সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা টান। উহারা যেন F বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। EF যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন ADর বর্ধিতাংশকে X বিন্দুতে ছেদ করিল। X নির্ণেয় বিন্দু হইল।

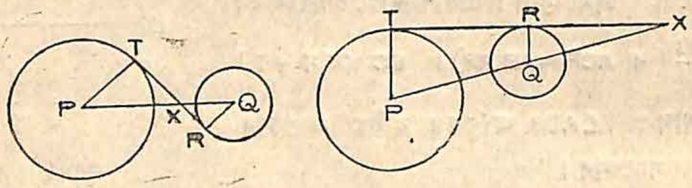
প্রমাণ : ∵ BF ∥ AE, ∴ $\frac{AX}{BX}=\frac{EX}{FX}$.

আবার, ∵ DF ∥ CE, ∴ $\frac{CX}{DX}=\frac{EX}{FX}$, ∴ $\frac{AX}{BX}=\frac{CX}{DX}$.

উদা. 12. দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক উহাদের কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখাকে বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করে।

মনে কর, বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র P ও Q এবং উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক TR কেন্দ্রসংযোজক রেখা PQকে ১ম চিত্রে অন্তঃস্থভাবে এবং ২য় চিত্রে বহিঃস্থভাবে X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, PX : QX = PT : QR.

PT ও QR যোগ কর।



৩৯নং চিত্র

প্রমাণ : RT স্পর্শক বলিয়া $\angle T = \angle QRX$ (সমকোণ,) এবং $\angle PXT = \angle RXQ$. ∴ ΔPXT ও ΔQXR সদৃশকোণী,

∴ PX : QX = PT : QR.

উদা. 13. দুইটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিলে তাহাদের সাধারণ স্পর্শক তাহাদের ব্যাসদ্বয়ের মধ্যসমানুপাতী হইবে।

মনে কর, দুইটি বৃত্ত T বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং PQ উহাদের সাধারণ স্পর্শক। প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ বৃত্ত দুইটির ব্যাসদ্বয়ের মধ্যসমানুপাতী।

অঙ্কন : ∴ PT যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। QB যোগ কর। আবার, QT যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। PA যোগ কর।

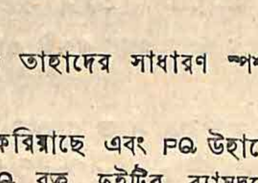
প্রমাণ : ∴ বৃত্তদ্বয় T বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে, ∴ ঐ বিন্দুতে উভয়ের একটি সাধারণ স্পর্শক আছে। মনে কর, ঐ সাধারণ স্পর্শক TR, উহা PQ-কে R বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে, ∵ PR = RT

∴ $\angle RTP = \angle RPT$. আবার,

∵ RT = RQ, ∴ $\angle RTQ = \angle RQT$

∴ সমগ্র $\angle PTQ = \angle TPQ + \angle PQT$

$= \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ $= 1$ সমকোণ।



৪০নং চিত্র

∴ $\angle PTA = 1$ সমকোণ, ∴ উহা অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

∴ PA বৃত্তের ব্যাস। অনুরূপে, $\angle QTB = 1$ সমকোণ,

সুতরাং উহা অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, ∴ QB বৃত্তের ব্যাস।

∵ PQ স্পর্শক এবং PT স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা,

∴ ∠QPT = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠A; অনুরূপে, ∠PQT = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠B

এক্ষণে, △PAQ ও △PBQ-এর ∠AQP = ∠PBQ এবং ∠PAQ = ∠BPQ,

∴ তৃতীয় কোণদ্বয় সমান। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, ∴ $\frac{AP}{PQ}=\frac{PQ}{BQ}$

∴ PQ, বৃত্ত দুইটির AP ও BQ ব্যাসদ্বয়ের মধ্যসমানুপাতী হইল।

উপপাদ্য 9

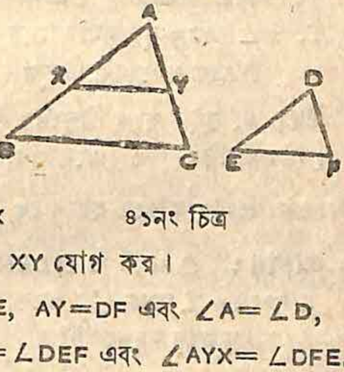
যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর অনুপাত অপর কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর অনুপাতের সমান হয় এবং উক্ত বাহুগুলির অন্তর্ভুর্ত কোণ দুইটিও সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হইবে।

[If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other and the sides about the equal angles proportional, the triangles are similar.]

মনে কর, ABC ও DEF ত্রিভুজের

$\angle A = \angle D$ এবং $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।



৪১নং চিত্র

অঙ্কন : AB হইতে DE-র সমান করিয়া AX এবং AC হইতে DF-এর সমান AY কাটিয়া লও। XY যোগ কর।

প্রমাণ : AXY ও DEF ত্রিভুজের AX = DE, AY = DF এবং ∠A = ∠D,

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ ∠AXY = ∠DEF এবং ∠AYX = ∠DFE.

আবার, ∵ $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$, ∴ $\frac{AB}{AX}=\frac{AC}{AY}$, ∴ XY ∥ BC.

∴ ∠AXY = অনুরূপ ∠B; সুতরাং ∠E = ∠B. অনুরূপে ∠F = ∠C.

∴ △ABC ও △DEF সদৃশকোণী, সুতরাং উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী। অতএব, ঐ ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সদৃশ।

বিবিধ সমাধান (5)

উদা. 1. দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি অনুরূপ বাহুগুলির সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে। [cf. W. B. S. F. '52]

মনে কর, ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির ∠A = ∠D, ∠B = ∠E, ∠C = ∠F এবং AP ও DQ যথাক্রমে △ABC ও △DEF-এর মধ্যমা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠APB = ∠DQE.

প্রমাণ : ∵ প্রদত্ত ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, ∴ $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{2BP}{2EQ}=\frac{BP}{EQ}$.

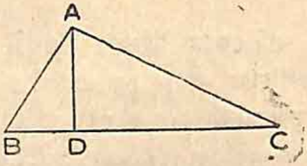
এক্ষণে, △ABP ও △DEQএর ∠B=∠E এবং AB : DE=BP : EQ.

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। ∴ ∠APB=∠DQE.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, অন্য মধ্যমাগুলির পক্ষেও ইহা সত্য।

উদা. 2. ABC ত্রিভুজে AD⊥BC. যদি BD : DA=DA : DC হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী। [C. U. '44, '48]

(যাহা স্বীকার করা আছে তাহা আগে লিখিয়া লও)



৪২নং চিত্র

প্রমাণ : △ABD ও △ADCর

∠ADB=∠ADC (সমকোণ বলিয়া) এবং

BD : DA=DA : DC (স্বীকার),

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

∴ ∠B=∠DAC এবং ∠C=∠DAB,

∴ সমগ্র ∠BAC=∠DAB+∠DAC=∠B+∠C.

∴ ∠BAC=দুই সমকোণের অর্ধেক=এক সমকোণ।

∴ △ABC সমকোণী ত্রিভুজ।

উদা. 3. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের উচ্চতাদ্বয় উহাদের অনুরূপ বাহুদ্বয়ের সমানুপাতী।

[চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর, △ABC ও △DEF সদৃশ এবং AM⊥BC ও DN⊥EF. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{AM}{DN}=\frac{BC}{EF}$.

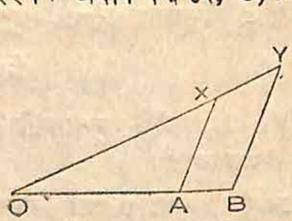
প্রমাণ : △ABM ও △DEN-এর ∠B=∠E (স্বীকার),

∠AMB=∠DNE (∵ প্রত্যেকে সমকোণ,) সুতরাং অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AM}{DN}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}.$$

উদা. 4. OAB সরলরেখার A ও B হইতে একই অভিমুখে AX ও BY দুই সমান্তরাল সরলরেখা টানায় OA : OB=AX : BY হইল। প্রমাণ কর যে, O, X ও Y এক সরলরেখায় অবস্থিত।



৪৩নং চিত্র

স্বীকার : OAB একটি সরলরেখা,

AX ∥ BY এবং OA : AB=AX : BY.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, O, X ও Y একই সরলরেখায় অবস্থিত।

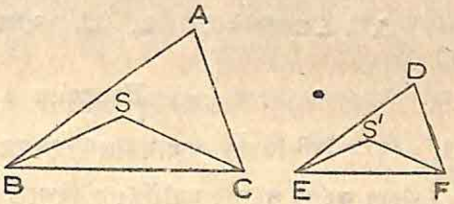
OX এবং OY যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ AX $\parallel$ BY, $\therefore$ $\angle OAX$ = অনুরূপ $\angle OBY$

আবার, OA : OB = AX : BY (স্বীকার,), $\therefore$ ΔOAX ও ΔOBY সদৃশ। $\therefore$ $\angle XOA = \angle YOB$. এক্ষণে, $\because$ OA, OB একই সরলরেখা, $\therefore$ OX ও OY সরলরেখাদ্বয়ও অর্থাৎ O, X, Y বিন্দুত্রয়ও একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উদা. 5. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধদ্বয় উহাদের অনুরূপ বাহুদ্বয়ের সমানুপাতী।

[**দ্রষ্টব্য :** ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র হয় এবং ঐ ছেদবিন্দু হইতে উহার যে কোন শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ অর্থাৎ পরিব্যাসার্ধ।]



৪৪নং চিত্র

মনে কর, ABC ও DEF সদৃশ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র S ও S'. BS ও CS এবং ES' ও FS' যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{BS'}{ES'} = \frac{BC}{EF}$.

প্রমাণ : S বিন্দু ΔABC-র পরিবৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া,

BS = CS ($\because$ উহারা পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ)। আবার, $\because$ একই চাপের উপর $\angle BSC$ কেন্দ্রস্থ ও $\angle BAC$ পরিধিস্থ কোণ, $\therefore$ $\angle BSC = 2\angle A$.

অনুরূপে, ΔDEFএর ES' = FS' এবং $\angle ES'F = 2\angle D$.

$\because$ ΔABC ও ΔDEF সদৃশ, $\therefore$ $\angle A = \angle D$, $\therefore$ $\angle S = \angle S'$.

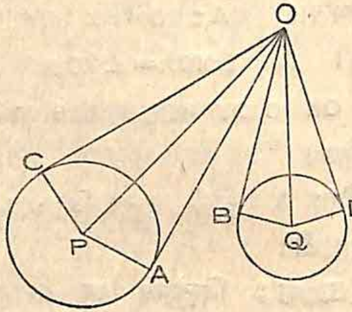
এক্ষণে, ΔBSC ও $\Delta ES'F$এর $\because$ $\angle S = \angle S'$ এবং $\frac{SB}{SE} = \frac{SC}{S'F}$,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। $\therefore$ $\frac{BS}{ES'} = \frac{BC}{EF}$.

উদা. 6. কোন নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমানুপাতী হইলে O বিন্দুতে বৃত্তদ্বয়ের সম্মুখকোণ দুইটি সমান হইবে। —[C. U. '12]

মনে কর, O বিন্দু হইতে P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের যথাক্রমে OA ও OB স্পর্শক টানা হইয়াছে এবং OA : OB = AP : BQ. O বিন্দু হইতে বৃত্তদ্বয়ে একটি করিয়া দ্বিতীয় স্পর্শক OC ও OD টানা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle AOC = \angle BOD$. PA, PO, PC এবং OQ, QD, BQ যোগ কর।



৪৫নং চিত্র

প্রমাণ : $\because$ AP ও BQ স্পর্শ-বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, $\therefore$ $\angle A$ ও $\angle B$ প্রত্যেকে সমকোণ। $\triangle OAP$ ও $\triangle OBQ$-এর $\angle A = \angle B$ এবং $OA : OB = AP : BQ$, $\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ। $\therefore$ $\angle AOP = \angle BOQ$. অনুরূপে, $\triangle OPC$ ও $\triangle OQD$ সদৃশ,

$\therefore$ $\angle COP = \angle DOQ$. $\therefore$ সমগ্র $\angle AOC$ = সমগ্র $\angle BOD$.

Exercise 4

1. কোন ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের একটি অপরটির দ্বিগুণ হইলে প্রমাণ কর যে উহার কর্ণদ্বয় পরস্পর সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করিবে।

2. ত্রিভুজের যে কোন দুইটি মধ্যমা পরস্পর সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে।

3. ABC ও DEF সদৃশ ত্রিভুজদ্বয়ের ভূমি BC ও EF একই অনুপাতে X ও Y বিন্দুতে বিভক্ত হইল। প্রমাণ কর যে, $AX : DY = BC : EF$.

4. ABCD একটি সামান্তরিক। AB-র সমান্তরাল একটি সরলরেখার উপর E ও F দুইটি বিন্দু। AE ও BF এবং DE ও CF যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $PQ \parallel AD$.

5. ত্রিভুজের ভূমির সমান্তরাল করিয়া উহার অপর বাহুদ্বয় পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

6. বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পর ছেদ করিলে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে। [C.U. '51 ; G.U. '52]

7. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশ। প্রমাণ কর যে, উহাদের অনুরূপ (i) মধ্যমাগুলি, (ii) উচ্চতাগুলি, (iii) পরিব্যাসার্ধগুলি ও (iv) অন্তর্ব্যাসার্ধগুলি সমানুপাতী।

8. বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের PT স্পর্শক ও PAB ছেদক টানা হইল। PAB বৃত্তটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে $PT^2 = PA.PB$.

9. $\triangle ABC$-র A° কোণের সমদ্বিখণ্ডক BC-কে D বিন্দুতে এবং ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $AB.AC = AP.AD$.

10. ABC ত্রিভুজে BC-র উপর AD লম্ব এবং $AB^2 = BC.BD$; প্রমাণ কর যে, A কোণটি সমকোণ।

11. △ABCএর A হইতে BC-র উপর AD লম্ব। যদি BD, AD ও CD ক্রমিক অনুপাতী হয়, তবে ∠BAC সমকোণ হইবে। [C. U. '44]

12. ABCD সামান্তরিকের A বিন্দু হইতে অঙ্কিত একটি সরলরেখা BD, BC ও DCকে যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $AP^2 = PQ.PR$.

13. △ABC-র A কোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে D বিন্দুতে এবং ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। EC যোগ করিয়া প্রমাণ কর যে, AB.AC = AE.AD. [C. U. '37]

14. দুইটি বৃত্তে দুইটি সমান্তরাল ব্যাসার্ধ টানিয়া (প্রত্যেক বৃত্তে একটি) উহাদের পরিধিস্থ প্রান্তবিন্দু দুইটি যুক্ত করা হইল। প্রমাণ কর যে, ঐ সংযোজক রেখাটি কেন্দ্রসংযোজক রেখাকে দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর কোন একটিতে ছেদ করিবে। [C. U. '17]

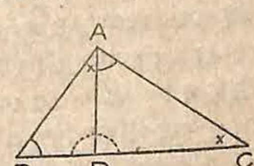
[চিত্র আঁক। মনে কর, AP ও BQ বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ পরস্পর সমান্তরাল এবং PQ রেখা AB-কে X ও Y বিন্দুতে অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থভাবে ছেদ করিল। এক্ষণে AX : BX = AP : BQ এবং AY : BY = AP : BQ. ∵ AP ও BQ নির্দিষ্ট এবং A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া স্থির বিন্দু, ∴ X ও Y স্থির বিন্দু।]

দ্রষ্টব্য : দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র সংযোজক রেখা যে দুই বিন্দুতে বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয় তাহাদিগকে ঐ বৃত্তদ্বয়ের **সাম্যকেন্দ্র** (Centres of Similitude) বলে।

উপপাদ্য 10

একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্ব টানিলে লম্বটির উভয় পার্শ্বের ত্রিভুজদ্বয় পরস্পরের সহিত এবং মূল ত্রিভুজের সহিত সদৃশ হইবে।

[In a right-angled triangle, if a perpendicular is drawn from the right-angle to the hypotenuse, the triangles on each side of it are similar to the whole-triangle and to one another.]



৪৬নং চিত্র

মনে কর, ABC সমকোণী ত্রিভুজের A সমকোণ।
A বিন্দু হইতে অতিভুজ BCর উপর AD লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, △ABD ও △ADC সদৃশ এবং উহারা প্রত্যেকে △ABC-র সহিত সদৃশ।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle ABC$-র $\angle B$ সাধারণ কোণ
এবং $\angle ADB = \angle BAC$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ),
$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAD$ = অবশিষ্ট $\angle ACB$.
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, সুতরাং উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।
$\therefore$ উহারা সদৃশ।
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $\triangle ADC$ ও $\triangle ABC$ সদৃশকোণী বলিয়া সদৃশ।
আবার, $\because$ $\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ প্রত্যেকে $\triangle ABC$-র সহিত সদৃশকোণী,
$\therefore$ উহারা পরস্পর সদৃশকোণী। $\therefore$ $\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ সদৃশ।

অনুসিদ্ধান্ত : (1) লম্বটি অতিভুজের অংশদ্বয়ের মধ্য-সমানুপাতী।
প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD রেখা BD ও DC-র মধ্য-সমানুপাতী।
প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$-র $\angle ADB = \angle ADC$ (সমকোণ বলিয়া), $\angle ABD = \angle CAD$ এবং $\angle BAD = \angle ACD$, $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।
$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$, অর্থাৎ AD রেখা BD ও CD-র মধ্য-সমানুপাতী।

(2) $\triangle ABD$ ও $\triangle ABC$ সদৃশ বলিয়া $AB^2 = BC.BD$, অর্থাৎ AB রেখা, BC ও BD-র মধ্য-সমানুপাতী।

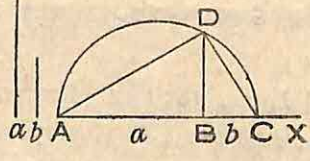
(3) $\triangle ACD$ ও $\triangle ABC$ সদৃশ বলিয়া $AC^2 = BC.CD$, অর্থাৎ AC রেখা, BC ও CD-র মধ্য-সমানুপাতী।

সম্পাদ্য 4

দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করিতে হইবে। [C. U. '46]
[To find the mean proportional between two given straight lines.]

মনে কর, a ও b দুইটি প্রদত্ত সরলরেখা। ইহাদের মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : যে কোন সরল রেখা AX লও। ইহা হইতে $AB = a$ এবং $BC = b$ কাটিয়া লও। ACকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর এবং $BD \perp AC$ টান। BD যেন অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।



৪৭নং চিত্র

এই BD রেখা AB ও BC-র অর্থাৎ a ও b-এর মধ্যসমানুপাতী হইল।

প্রমাণ : AD ও DC যোগ কর। $\angle ADC$ অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ।
$\because$ সমকৌণিক বিন্দু D হইতে অতিভুজ AC-র উপর DB লম্ব,
$\therefore$ $\triangle ABD$ ও $\triangle DBC$ সদৃশ।
$\therefore$ $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$, $\therefore$ $\frac{a}{BD} = \frac{BD}{b}$, $\therefore$ BD, a ও b-র মধ্য-সমানুপাতী।

[দ্রষ্টব্য : (চিত্র নং 47 দেখ।) মনে কর AC ও AB প্রদত্ত রেখা এবং উহারা একটির উপর অপরটি এরূপে সমাপতিত যে উভয়ের A প্রান্ত মিলিত হইয়াছে। এরূপ ক্ষেত্রে AD রেখা AC ও AB-র মধ্যসমানুপাতী হইবে। আবার, CD রেখা CB ও CA-র মধ্যসমানুপাতী হইবে।]

বিবিধ সমাধান (6)

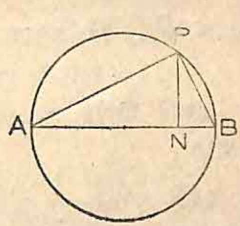
উদা. 1. $\triangle ABC$-র $\angle A$ সমকোণ এবং AD রেখা ভূমি BDর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, BD : AD = AD : DC. [C. U. '48]

[উপপাদ্য 10এর চিত্র আঁকিয়া প্রমাণ কর যে, $\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ সদৃশ।

$\therefore$ BD : AD = AD : DC]

উদা. 2. APB বৃত্তের পরিধিস্থ P বিন্দু হইতে AB ব্যাসের উপর লম্বের পাদবিন্দু N. প্রমাণ কর যে, $PB^2 = AB.NB$. [C. U. '39]

পরিধিস্থ P বিন্দু হইতে AB ব্যাসের উপর PN লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $PB^2 = AB.NB$. AP ও BP যোগ কর।



৪৮নং চিত্র

প্রমাণ : $\because$ AB ব্যাস, $\therefore \angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া সমকোণ। আবার, $\because PN \perp AB$, $\therefore \triangle APB$ ও $\triangle PNB$ সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{PB} = \dfrac{PB}{NB}$ $\therefore PB^2 = AB.NB$.

উদা. 3. কোন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি ক্রমিক সমানুপাতী। উহার সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে, অতিভুজের বৃহত্তর অংশটি ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর সমান। [C. U. '39]

[চিত্র নং 46 আঁক] মনে কর, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ, অতিভুজ BCর উপর AD লম্ব এবং AB : AC = AC : BC. যদি ত্রিভুজটির AB বাহু ক্ষুদ্রতম হয় এবং CD > DB হয়, তবে প্রমাণ কর যে CD = AB.

প্রমাণ : $\triangle ACD$ ও $\triangle ABC$ সদৃশ, $\therefore \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$,

কিন্তু $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$ (স্বীকার) $\therefore \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{AB}{AC}$, $\therefore$ CD = AB.

উদা. 4. জ্যামিতিক প্রণালীতে $\sqrt{5}$ এর মান নির্ণয় কর।

[সম্পাদ্য 4এর চিত্র দেখ] AC = 5 দৈর্ঘ্য একক লও। উহা হইতে AB = 1 দৈর্ঘ্য একক কাটিয়া লও। AB ও AC-র মধ্যসমানুপাতী AD অঙ্কন কর।

একণে ∵ AD রেখা AB ও ACর মধ্যসমানুপাতী,

∴ $AD^2 = AB.AC = 5.1$ বা 5 বর্গ একক।

∴ $AD = \sqrt{5}$ দৈর্ঘ্য একক। অতএব, AD দৈর্ঘ্যই $\sqrt{5}$ এর জ্যামিতিক মান।

[দ্রষ্টব্য : $\sqrt{15} = \sqrt{5 \times 3}$, সুতরাং 5 ও 3 দৈর্ঘ্য এককের মধ্য-সমানুপাতীই $\sqrt{15}$এর মান হইবে। $\sqrt{34} = \sqrt{6.8 \times 5}$ এইভাবে ধরিতে হয়।]

Exercise 5

1. 3 সে. মি. ও 4 সে. মি. দীর্ঘ দুইটি সরলরেখার মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় কর।

2. জ্যামিতিক প্রণালীতে $\sqrt{21}$এর মান নির্ণয় কর।

3. △ABCর ∠A সমকোণ এবং AD⊥BC, প্রমাণ কর যে, BD : AD = AD : DC. [G. U. '48]

4. APB বৃত্তের P বিন্দু হইতে ব্যাস AB-র উপর PN লম্ব। প্রমাণ কর যে $PB^2 = AB.BN$. [C. U. '29]

5. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশ একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত কর।

6. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি নির্দিষ্ট বহুভুজের সদৃশ অন্য একটি বহুভুজ আঁক।

7. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দুতে প্রত্যেক বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করায় স্পর্শক দুইটি অপর বৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = BP.BQ$.

উপপাদ্য 11

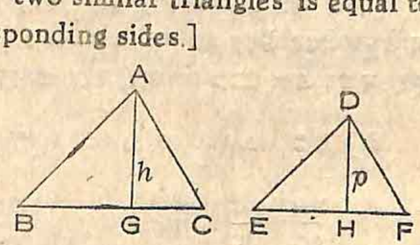
দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের অনুরূপ বাহুদ্বয়ের বর্গের অনুপাতের সমান।

[The ratio of the areas of two similar triangles is equal to the ratio of the squares on corresponding sides.]

মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ, ইহাদের ∠A = ∠D, ∠B = ∠E, ∠C = ∠F এবং BC ও EF অনুরূপ বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

△ABC : △DEF = $BC^2 : EF^2$.



৪৯নং চিত্র

অঙ্কন : BC ও EF-এর উপর যথাক্রমে AG ও DH লম্ব টান এবং মনে কর, $AG = h$ দৈর্ঘ্য একক এবং $DH = p$ দৈর্ঘ্য একক। h ও p ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা।

প্রমাণ : $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা $= \frac{1}{2}BC.h.$, এবং $\triangle DEF = \frac{1}{2}EF.p.$

$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC.h}{\frac{1}{2}EF.p} = \frac{BC}{EF}.\frac{h}{p}.$

এক্ষণে, $\triangle ABG$ ও $\triangle DEH$এর $\angle B = \angle E$ এবং

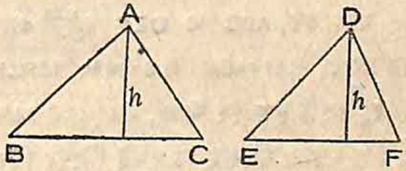
$\angle AGB = \angle DHE$ (সমকোণ বলিয়া), $\therefore$ অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান।

$\therefore$ ঐ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ।

$\therefore \quad \frac{h}{p} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ($\because$ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ)

$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC}{EF}.\frac{h}{p} = \frac{BC}{EF}.\frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}.$

দ্রষ্টব্য : সমান উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান।



৫০নং চিত্র

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$-এর ভূমি BC ও EF এবং h উহাদের উচ্চতা। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF.$

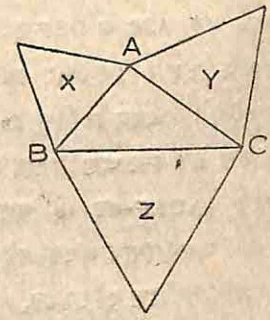
প্রমাণ : $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা $= \frac{1}{2}BC.h$ এবং $\triangle DEF = \frac{1}{2}EF.h.$

$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC\,h}{\frac{1}{2}EF.h} = \frac{BC}{EF}.$]

বিবিধ সমাধান (7)

উদা. 1. সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করিলে অতিভুজের উপর অঙ্কিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল অপর দুইটি অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হয়। [C. U. '19, '21, '31]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। ইহার AB, AC ও BC বাহুর উপর যথাক্রমে X, Y ও Z সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা হইল।



৫১নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $Z = X + Y.$

প্রমাণ : $\because$ X, Y ও Z তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ,

$\therefore$ উহাদের প্রত্যেক কোণ 60°, সুতরাং উহারা সদৃশকোণী ও সদৃশ ত্রিভুজ।

$\therefore \quad \frac{X}{Z} = \frac{AB^2}{BC^2}$ এবং $\frac{Y}{Z} = \frac{AC^2}{BC^2}$

$\therefore \quad \frac{X}{Z} + \frac{Y}{Z} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2}.$

অর্থাৎ $\frac{X+Y}{Z}=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=\frac{BC^2}{BC^2}$ [∵ ∠A=সমকোণ]=1,

$\therefore\ X+Y=Z.$

উদা. 2. দুইটি সমবাহু ত্রিভুজের সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক।

[D. B. '46]

মনে কর, △ABC ও △DEF দুইটি প্রদত্ত সমবাহু ত্রিভুজ। একটি সরলরেখা PQ=BC লও। PR⊥PQ টান, যেন PR=EF হয়। QR যোগ কর, QR-এর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজই নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে। [প্রমাণের জন্য উদা. 1 দেখ।]

উদা. 3. দুইটি সমবাহু ত্রিভুজের অন্তরের সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক।

[C. U. '45]

মনে কর, ABC ও DEF দুইটি প্রদত্ত সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যে △ABC বৃহত্তর। সরলরেখা KM=EF লও এবং MP⊥KM টান। Kকে কেন্দ্র করিয়া BC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন MPকে N বিন্দুতে ছেদ করিল। MNএর উপর অঙ্কিত MNR সমবাহু ত্রিভুজই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

প্রমাণ : এখানে ত্রিভুজ তিনটি সমবাহু হওয়ায় উহারা সদৃশ।

$\therefore\ \frac{\triangle ABC}{\triangle MNR}=\frac{BC^2}{MN^2}$ এবং $\frac{\triangle DEF}{\triangle MNR}=\frac{EF^2}{MN^2}$

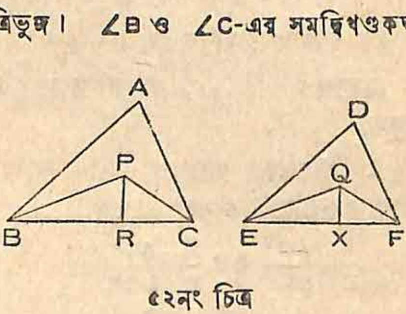
$\therefore\ \frac{\triangle ABC-\triangle DEF}{\triangle MNR}=\frac{BC^2-EF^2}{MN^2}=\frac{KN^2-KM^2}{MN^2}$

$=\frac{MN^2}{MN^2}$ [∵ ∠M সমকোণ]=1. ∴ △MNR=△ABC−△DEF.

উদা. 4. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয়ের বর্গের অনুপাতের সমান।

[C. U.]

মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ। ∠B ও ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করিল এবং PR⊥BC টানা হইল। এখন P বিন্দু △ABCর অন্তঃকেন্দ্র এবং PR অন্তর্ব্যাসার্ধ হইল। অনুরূপে △DEF-এর Q অন্তঃকেন্দ্র এবং QX অন্তর্ব্যাসার্ধ লওয়া হইল।



৫২নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

△ABC : △DEF=PR² : QX².

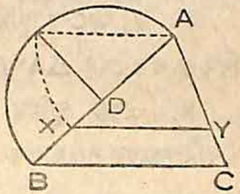
প্রমাণ : $\angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC$ এবং $\angle QEF = \frac{1}{2}\angle DEF$, কিন্তু $\angle ABC = \angle DEF$, $\therefore$ $\angle PBC = \angle QEF$. অনুরূপে $\angle PCB = \angle QFE$,
$\therefore$ $\triangle PBC$ ও $\triangle QEF$ সদৃশকোণী। $\therefore$ $PB : QE = BC : EF$.
আবার, $\triangle BPR$ ও $\triangle EQX$এর $\angle PBR = \angle QEX$ এবং $\angle PRB = \angle QXE$(সমকোণ)
$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী, $\therefore$ $PR : QX = BP : QE$.

অতএব, $PR : QX = BC : EF$. এক্ষণে, $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{PR^2}{QX^2}$.

উদা. 5. ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া একটি ত্রিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।
[C. U. '16, '32, '50 ; D. B. '46]

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। ভূমি BC-র সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : ABকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। AB হইতে AD ও AB-র মধ্য-সমানুপাতীর সমান AX অংশ কাটিয়া লও। X হইতে BC-র সমান্তরাল XY টান, উহা যেন ACকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC ত্রিভুজ XY দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইল।



৫৩নং চিত্র

প্রমাণ : $\because$ $XY \parallel BC$, $\therefore$ $\triangle AXY$ ও $\triangle ABC$ সদৃশকোণী, সুতরাং উহারা সদৃশ। আবার, $\because$ AX রেখা AD ও ABর মধ্য-সমানুপাতী $\therefore$ $AX^2 = AD.AB$.

এক্ষণে, $\frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{AD.AB}{AB^2} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$ ($\because$ D, AB-র মধ্যবিন্দু)

$\therefore$ $\triangle AXY = \frac{1}{2}\triangle ABC$; সুতরাং $\triangle ABC$, XY দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

Exercise 6

1. চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় উহাকে যে চারিটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে তাহাদের ক্ষেত্রফলগুলি সমানুপাতী।

2. কোন বর্গক্ষেত্রের একটি কর্ণের উপর অঙ্কিত যে কোন ত্রিভুজ উহার অন্য কোন বাহুর উপর অঙ্কিত সদৃশ ত্রিভুজের দ্বিগুণ হইবে।

3. ABC ত্রিভুজে $\angle A$ সমকোণ এবং $AD \perp BC$. প্রমাণ কর যে,
$\triangle ABD : \triangle ACD = AB^2 : AC^2$. [G. U. '49]

4. $\triangle ABC$র ক্ষেত্রফল 19·6 বর্গ সে. মি.। XY ∥ BC টানা হইলে উহা ABকে 4 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করিল। $\triangle AXY$এর ক্ষেত্রফল কত?

[উত্তর = 6·4 বর্গ সে. মি.]

5. দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল দুইটির অনুপাত 3 : 2 এবং বৃহত্তর ত্রিভুজের উচ্চতা 5·2 সে. মি.। অপর ত্রিভুজটির উচ্চতা কত? [C. U. '35]

6. $\triangle ABC$র BC বাহুর সমান্তরাল PQ টানা হইলে যদি $\triangle APQ$: ক্ষেত্র PBCQ = 4 : 5 হয়, তবে AP : BP = 2 : 1 হইবে।

7. ABC ত্রিভুজ একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত এবং A বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তটির স্পর্শক বর্ধিত BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $CD : BD = AC^2 : AB^2$.

[C. U. '39, '51 ; G. U. '51]

8. $\triangle ABC$-র ভূমি BC-র সমান্তরাল XY টানিয়া ত্রিভুজটিকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন $\triangle AXY$এর ক্ষেত্রফল $\triangle ABC$র $\frac{9}{16}$ অংশ হয়। [C. U. '25]

9. একই ভূমির উপর অবস্থিত ত্রিভুজদ্বয়ের অনুপাত ঐ ভূমির দ্বারা বিভক্ত শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার অংশদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

10. সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর সদৃশ ত্রিভুজ অঙ্কন করিলে অতিভুজের উপর অঙ্কিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল অন্য দুইটি অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হইবে। [C. U. '45, '48]

11. প্রমাণ কর যে, দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত (1) উহাদের অনুরূপ মধ্যমাদ্বয়ের বর্গের, (2) উহাদের অনুরূপ উচ্চতাদ্বয়ের বর্গের, (3) উহাদের পরিব্যাসার্ধদ্বয়ের বর্গের অনুপাতের সমান।

12. বৃত্তস্থ ABCD চতুর্ভুজের DA ও CB বাহুকে বর্ধিত করায় O বিন্দুতে ছেদ করিল। $AB = \frac{1}{2}CD$ হইলে প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজটি $\triangle OAB$র তিনগুণ হইবে।

13. ABC ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ DEF; প্রমাণ কর যে, $\triangle ABC : \triangle DBF = AB^2 : BD^2$. [W. B. S. F. '53]

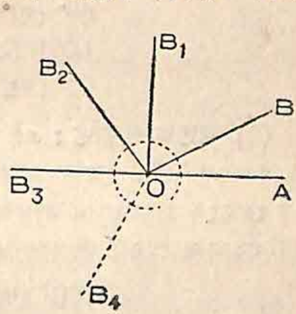
14. $\triangle ABC$র A কোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে D বিন্দুতে এবং ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। EC যোগ করিয়া প্রমাণ কর যে, $AB.AC = AE.AD$. [C. U. '37]

তৃতীয় অধ্যায়

ত্রিকোণমিতি (Trigonometry)

1. **ত্রিকোণমিতি**—ত্রিভুজের তিনটি কোণ থাকায় উহাকে 'ত্রিকোণ'ও বলা যায়। গণিতশাস্ত্রের যে শাখায় সমতলে অঙ্কিত ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাণ ও সম্বন্ধ বিষয়ে আলোচনা করা হইয়াছে তাহাকে 'ত্রিকোণমিতি' বলে। ইহা জ্যামিতির একটি বিশিষ্ট শাখা। ইহার আলোচ্য বিষয় অধিকতর ব্যাপক।

2. **জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণ**—ত্রিকোণমিতিক কোণ জ্যামিতিক কোণ অপেক্ষা অধিকতর ব্যাপক। মনে কর, OB সরলরেখা O-কে কেন্দ্র করিয়া OA অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে (anti-clockwise) ঘুরিতে লাগিল। OB প্রথমে AOB সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করিয়া পরে যখন OA-র সহিত লম্বভাবে দাঁড়াইবে তখন AOB_1 কোণটি সমকোণ (90°) হইবে। OB আরও কিছু ঘুরিয়া গেলে AOB_2 কোণটি স্থূলকোণ হইবে। এইভাবে ঘুরিয়া OB যখন OA-এর ঠিক বিপরীত দিকে এক সরলরেখায় অবস্থিত হইবে তখন AOB_3 কোণটি সরলকোণ বা দুই সমকোণ (180°) হইবে। আরও



চিত্র নং 1

ঘুরিতে AOB_4 কোণটি প্রবৃদ্ধ কোণ (Reflex angle) হইবে। আর, OB যখন সম্পূর্ণ একবার ঘুরিয়া OA-র সহিত মিলিত হইবে, তখন সমগ্র AOB কোণটি চার সমকোণ (360°) উৎপন্ন হইবে।

জ্যামিতিতে আমরা এই পর্যন্ত কোণের আলোচনা করিয়া থাকি, এবং এই পর্যন্ত জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণের কোন অমিল নাই।

এখন যদি মনে করি যে, OB রেখাটি সম্পূর্ণ একপাক অপেক্ষা কিছু বেশী ঘুরিয়া OB অবস্থানে গেল, তখন যে AOB কোণটি উৎপন্ন হইল তাহা 4 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। ত্রিকোণমিতিতে এইভাবে ক্রমশঃ আরও বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন হইতে পারে; কিন্তু জ্যামিতিতে 4 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণ ধরা হয় না।

3. **ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ**—পূর্বে দেখান হইয়াছে যে, OB রেখা ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে (anti-clockwise) ঘুরিয়া কোণগুলি উৎপন্ন করিয়াছে। এই কোণগুলিকে ধনাত্মক (positive) কোণ বলে। আবার, OB রেখা ঘড়ির

কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেই দিকে ঘুরিলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয়, সেইগুলিকে ঋণাত্মক (negative) কোণ বলা হয়। এ সম্বন্ধে পরে আলোচনা করা হইবে।

4. **কোণের পরিমাণ**—কোন কোণের মান বা পরিমাণ নির্ণয়ের তিনটি প্রণালী (system) আছে। যথা (1) **ষষ্টিক পদ্ধতি** (sexagesimal system), (2) **শতক পদ্ধতি** (centesimal system), (3) **বৃত্তীয় পদ্ধতি** (circular system).

(1) **ষষ্টিক পদ্ধতি :** সমকোণ একটি ধ্রুবক কোণ। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে কোণের একক ধরা হয় এবং উহাকে 90 সমানভাগে বিভক্ত করিলে প্রতি অংশ এক **ডিগ্রী** (degree) হয়। এক ডিগ্রীকে 60 সমান ভাগ করিলে প্রতি ভাগকে এক **মিনিট** (minute) এবং 1 মিনিটের 60 সমান ভাগের এক ভাগকে এক **সেকেণ্ড** (second) বলা হয়।

$60''$ সেকেণ্ড $= 1'$ মিনিট
$60'$ মিনিট $= 1^\circ$ ডিগ্রী
90° ডিগ্রী $= 1$ সমকোণ।

(2) **শতক পদ্ধতি :** এই পদ্ধতিতেও সমকোণকে কোণের একক ধরা হয়। এক সমকোণকে 100 সমান ভাগ করিয়া এক অংশকে এক **গ্রেড** (grade) বলা হয়। এক গ্রেডকে 100 সমান ভাগ করিলে এক অংশকে এক **মিনিট** এবং এক মিনিটের 100 সমান ভাগের 1 ভাগকে এক **সেকেণ্ড** বলা হয়।

$100^{``}$ সেকেণ্ডে $1^{`}$ মিনিট
$100^{`}$ মিনিটে 1 গ্রেড
100^g গ্রেডে 1 সমকোণ।

[**দ্রষ্টব্য :** ষষ্টিক ও শতক এই উভয় পদ্ধতিতেই মিনিট ও সেকেণ্ড আছে। সুতরাং উহাদের প্রতীক চিহ্নগুলি বিশেষভাবে লক্ষ্য করিতে হইবে। $1''$ এইরূপ চিহ্নবিশিষ্ট কোণে ষষ্টিক পদ্ধতির এক সেকেণ্ড এবং $1^{``}$ এই চিহ্নযুক্ত কোণে শতক পদ্ধতির এক সেকেণ্ড বুঝায়। এইরূপে $1'$ এই চিহ্ন দ্বারা ষষ্টিক পদ্ধতির এক মিনিট এবং $1^{`}$ এই চিহ্ন দ্বারা শতক পদ্ধতির এক মিনিট বুঝায়।]

5. **ষষ্টিক ও শতক মানের পরস্পর সম্বন্ধ**—

$90^\circ = 1$ সমকোণ $= 100^g$, $\therefore\ 9^\circ = 10$, $1^\circ = \frac{10^g}{9}$

অনুরূপে $1^g = \frac{9^\circ}{10}$.

দ্রষ্টব্য নিয়ম : কোন এক পদ্ধতির মানে প্রকাশিত কোণকে অন্য পদ্ধতির মানে প্রকাশ করিতে হইলে প্রদত্ত কোণকে এক সমকোণের দশমিকে পরিণত করিয়া তৎপরে নূতন মানে পরিণত করিতে হয়। পরের উদাহরণগুলি দেখ।

উদা. 1. $30^\circ 45' 30''{\cdot}6$-কে শতক মানে প্রকাশ কর।

$$30^\circ 45' 30''{\cdot}6 = 30^\circ + \left(45 + \frac{30{\cdot}6}{60}\right)' = 30^\circ + (45 + {\cdot}51)'$$

$$= 30^\circ + 45{\cdot}51' = \left(30 + \frac{45{\cdot}51}{60}\right)^\circ = (30{\cdot}7585)^\circ$$

$$= \frac{30{\cdot}7585}{90} \text{ সমকোণ}$$

$$= {\cdot}34176\dot{1} \text{ সমকোণ}$$

$$\times 100$$

$$34{\cdot}176\dot{1}^g$$

$$\times 100$$

$17{\cdot}6\dot{1}^{\backprime}$ [$\cdot 176\dot{1} \times 100$ করিয়া]

$$\times 100$$

$61^{\backprime\backprime}{\cdot}\dot{1}$ [$\cdot 6\dot{1} \times 100$ করিয়া]

$\therefore\ 30^\circ 45' 30''{\cdot}6 = 34^g 17^{\backprime} 61{\cdot}\dot{1}^{\backprime\backprime}$.

উদা. 2. $14^g 17^{\backprime} 36^{\backprime\backprime}$ কোণটি কয় সমকোণের সমান ?

$14^g 17^{\backprime} 36^{\backprime\backprime} = 14^g 17{\cdot}36^{\backprime} = 14{\cdot}1736^g = {\cdot}141736$ সমকোণ।

[দ্রষ্টব্য : $36^{\backprime\backprime}$কে মিনিটে পরিণত করিবার জন্য 36কে 100 দিয়া ভাগ করিলে হয় ·36, সুতরাং 17·36 মিনিট হইল। উহাকে 100 ভাগ করিলে হয় 1736 গ্রেড, সুতরাং 14·1736 গ্রেড হইল। উহাকে 100 ভাগ করিয়া হইল ·141736 সমকোণ। অতএব দেখা গেল যে, সেকেণ্ডের সংখ্যার ডানদিক হইতে দুই অঙ্ক বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে উহা মিনিটে পরিণত হয়। এইরূপে মিনিটের সংখ্যার দুই অঙ্ক বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে গ্রেডে এবং গ্রেডের সংখ্যার দুই অঙ্ক বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে সমকোণে পরিণত হয়। যদি দুই অঙ্ক না থাকিয়া এক অঙ্ক থাকে, তবে উহার বামে শূন্য বসাইয়া তাহার বামে দশমিক বিন্দু বসাইবে।]

উদা. 3. $40^g 8^{\backprime} 75^{\backprime\backprime}$কে ষষ্টিক মানে প্রকাশ কর।

$40^g 8^{\backprime} 75^{\backprime\backprime} = {\cdot}400875$ সমকোণ

$$\times 90$$

$$36^\circ{\cdot}07875$$

$$\times 60$$

$4{\cdot}725$ [${\cdot}07875 \times 60$ করিয়া]

$$\times 60$$

$43{\cdot}5''$ [${\cdot}725 \times 60$ করিয়া]

$\therefore\ 40^g 8^{\backprime} 75^{\backprime\backprime} = 36^\circ 4' 43{\cdot}5''$.

5. **কোণের বৃত্তীয়মান** (circular measure)—বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ানকে (Radian) একক ধরা হয়।

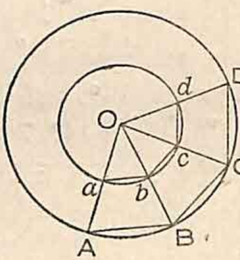
রেডিয়ান: যে কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ উহার কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে এক রেডিয়ান (1^c) বলে। ইহা একটি ধ্রুবক (constant) কোণ এবং ইহার পরিমাণ প্রায় $57°17'44{\cdot}8''$. 4^c বলিলে চার রেডিয়ান কোণ বুঝাইবে।

এই সম্বন্ধে আলোচনার পূর্বে নিম্নের প্রতিজ্ঞাটির জ্ঞান আবশ্যক।

6. **প্রতিজ্ঞা**—"বৃত্তসমূহের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক"।

অথবা, "বৃত্তসমূহের পরস্পর পরিধিগুলির অনুপাত উহাদের ব্যাসার্ধগুলির অনুপাতের সমান"।

মনে কর, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন দুইটি ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। R ও r যেন যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ।



চিত্র নং 2

বৃহত্তর বৃত্তে ABCD···একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত হইল। মনে কর, ইহার বাহুসংখ্যা n.

এখন, OA, OB, OC···প্রভৃতি যোগ করিলে উহারা দ্বিতীয় বৃত্তকে যথাক্রমে $a, b, c, d\cdots$ প্রভৃতি n-বিন্দুতে ছেদ করিল। $ab, bc, cd\cdots$ যোগ করিলে দ্বিতীয় বৃত্তে $abcd\cdots$ এই সুষম n-ভুজ অন্তর্লিখিত হইবে।

এখন $\triangle OAB$ ও $\triangle Oab$র মধ্যে $\because$ $OA=OB$, $Oa=Ob$,

$\therefore$ $\dfrac{OA}{Oa}=\dfrac{OB}{Ob}$, এবং $\because$ $\angle AOB=\angle aOb$,

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ। $\therefore$ $\dfrac{AB}{ab}=\dfrac{OA}{Oa}=\dfrac{R}{r}$.

এইরূপে, $\dfrac{AB}{ab}=\dfrac{BC}{bc}=\dfrac{CD}{cd}=\cdots=\dfrac{R}{r}$, $\therefore$ $\dfrac{AB+BC+CD+\cdots}{ab+bc+cd+\cdots}=\dfrac{R}{r}$,

অর্থাৎ $\dfrac{ABCD\cdots\text{বহুভুজের পরিসীমা}}{ab.d\cdots\text{বহুভুজের পরিসীমা}}=\dfrac{R}{r}=\dfrac{ABCD\cdots\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{abcd\cdots\text{ বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$

এখন ABCD···বহুভুজটির বাহুসংখ্যা ক্রমশঃ যত বেশী হইবে AB, BC····ক্রমশঃ তত ছোট হইবে। এইভাবে n ক্রমশঃ বর্ধিত হইলে চরম অবস্থায় (in the limit) বহুভুজের পরিসীমা বৃত্তের পরিধির সমান হইবে।

অতএব, $\dfrac{\text{ABCD}\cdots\text{বৃত্তের পরিধি}}{abcd\cdots\text{বৃত্তের পরিধি}}=\dfrac{\text{ABCD}\cdots\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{abcd\cdots\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$

$$=\frac{R}{r}=\frac{2R}{2r}=\frac{\text{ABCD}\cdots\text{বৃত্তের ব্যাস}}{abcd\cdots\text{বৃত্তের ব্যাস}}=\text{ধ্রুবক}।$$

$$\therefore\ \frac{\text{ABCD}\cdots\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{ABCD}\cdots\text{বৃত্তের ব্যাস}}=\frac{abcd\ \text{বৃত্তের পরিধি}}{abcd\cdots\text{বৃত্তের ব্যাস}}=\text{ধ্রুবক}।$$

[**দ্রষ্টব্য :** ঐ ধ্রুবক সংখ্যাটি π (পাই) এই গ্রীসীয় অক্ষর দ্বারা সূচিত হয়। ইহা একটি অমেয় সংখ্যা। ইহার স্থূলমান $=\frac{22}{7}$ এবং অধিকতর আসন্নমান $=\frac{355}{113}$ বা $3{\cdot}14159\cdots$।]

বৃত্তের পরিধি $=2\pi r$ ($r=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ), বৃত্তের কালি $=\pi r^2$.

7. **প্রতিজ্ঞা :** "রেডিয়ান পরিমিত কোণ একটি ধ্রুবক কোণ।"

অথবা, "বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান কোন চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখ-কোণটি ধ্রুবক।"

[রেডিয়ানের সংজ্ঞা লিখ এবং প্রমাণ কর যে রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।]

[C. U. '46 ; G. U. '48]

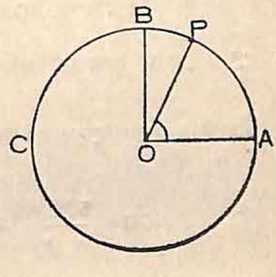
মনে কর, APC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং চাপ AP $=$ ব্যাসার্ধ OA $=r$;

সুতরাং $\angle$AOP এক রেডিয়ান (1^c)

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle$AOP ধ্রুবক।

ব্যাসার্ধ OB$\perp$OA টান।

এক্ষণে, চাপ AB $=\frac{1}{4}$ পরিধি।



চিত্র নং 3

প্রমাণ : কোন বৃত্তে চাপগুলির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

$$\therefore\ \frac{\angle AOP}{\angle AOB}=\frac{\text{চাপ AP}}{\text{চাপ AB}}=\frac{\text{ব্যাসার্ধ OA}}{\frac{1}{4}\text{ পরিধি}}=\frac{r}{\frac{2\pi r}{4}}=\frac{2}{\pi}.$$

$$\therefore\ \frac{\angle AOP}{1\ \text{সমকোণ}}=\frac{2}{\pi},\quad \therefore\ \angle AOP=\frac{2}{\pi}\ \text{সমকোণ},$$

অর্থাৎ এক রেডিয়ান $=\frac{2}{\pi}$ সমকোণ $=$ ধ্রুবক।

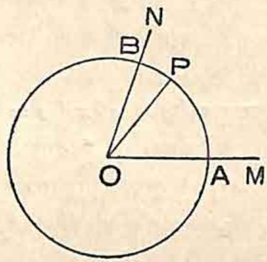
[**দ্রষ্টব্য :** $1^c=\frac{2}{\pi}$ সমকোণ $=\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ17'44{\cdot}8''$ (প্রায়),

$\pi^c=2$ সমকোণ $=180^\circ$, $\frac{\pi^c}{2}=1$ সমকোণ, $1^\circ={\cdot}017453$ রেডিয়ান (প্রায়)]।

8. প্রতিজ্ঞা। "কোন বৃত্তের কোন চাপ ও ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ চাপ-সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয়মান হইবে।"

অথবা, "প্রমাণ কর যে, বৃত্তের কোন কেন্দ্রস্থ কোণের রেডিয়ান মান, $\frac{\text{কোণধারক চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$ এই ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশিত হয়।" [C. U. '40, '47]

মনে কর, MON একটি কোণ, ইহার বৃত্তীয়মান নির্ণয় করিতে হইবে। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ (r) লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন OM ও ONকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন ∠AOB, AB চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণ হইল। বৃত্তের ব্যাসার্ধের (r) সমান করিয়া AP চাপ কাটিয়া লও এবং OP যোগ কর। ইহাতে ∠AOP = 1 রেডিয়ান হইল।



চিত্র নং 4

∵ কোন বৃত্তে চাপগুলির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান, ∴ $\frac{\angle AOB}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AP} = \frac{\text{চাপ } AB}{r}$,

$$\therefore \angle AOB = \frac{\text{চাপ } AB}{r} \times \angle AOP = \frac{\text{চাপ } AB}{r} \times 1 \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{\text{চাপ } AB}{r} \text{ রেডিয়ান।}$$

[দ্রষ্টব্য : যদি চাপ AB $= s$ এবং ∠AOB $= \theta$ রেডিয়ান অর্থাৎ θ^c হয়, তবে $\theta = \frac{s}{r}$ হইবে। অর্থাৎ **কোণের বৃত্তীয়মান = চাপ ÷ ব্যাসার্ধ।**

বৃত্তের চাপ $= \theta r$; বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$; বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\theta r^2$.]

9. তিনটি পদ্ধতির পরস্পর সম্বন্ধ—

$90° = 1$ সমকোণ ; $100^g = 1$ সমকোণ ; $\frac{\pi^c}{2} = 1$ সমকোণ

$$\therefore 90° = 100^g = \frac{\pi^c}{2} \text{ বা, } 180° = 200^g = \pi^c.$$

10. এক পদ্ধতি হইতে অন্য পদ্ধতিতে পরিবর্তন—

(1) $\because$ $90^\circ = 1$ সমকোণ, $\therefore$ $1^\circ = \frac{1}{90}$ সমকোণ $= \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi^c}{180}$.

$\because$ $90^\circ = 100^g$, $\therefore$ $1^\circ = \frac{10}{9}$ গ্রেড।

(2) $\because$ $100^g = 1$ সমকোণ, $\therefore$ $1^g = \frac{1}{100}$ সমকোণ $= \frac{\pi}{200}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi^c}{200}$.

$\because$ $100^g = 90^\circ$, $\therefore$ $1^g = \frac{9}{10}$ ডিগ্রি।

(3) $\because$ $\pi^c = 2$ সমকোণ $= 180^\circ$, $\therefore$ $1^c = \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রি $= \frac{180^\circ}{\pi}$,

$\because$ $\pi^c = 2$ সমকোণ $= 200^g$, $\therefore$ $1^c = \frac{200}{\pi}$ গ্রেড $= \frac{200^g}{\pi}$.

এই প্রসঙ্গে 5নং অনুচ্ছেদের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণ 1. 20°, 36°, 40^g এবং $6^g\ 25'$কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(i) $\because$ $180^\circ = \pi^c$, $\therefore$ $1^\circ = \frac{\pi^c}{180}$, $\therefore$ $20^\circ = \frac{\pi^c \times 20}{180} = \frac{\pi^c}{9}$.

(ii) $1^\circ = \frac{\pi^c}{180}$, $\therefore$ $36^\circ = \frac{\pi^c \times 36}{180} = \frac{\pi^c}{5}$.

(iii) $\because$ $200^g = \pi^c$. $\therefore$ $1^g = \frac{\pi^c}{200}$, $\therefore$ $40^g = \frac{\pi^c \times 40}{200} = \frac{\pi^c}{5}$.

(iv) $\because$ $1^g = \frac{\pi}{200}$ রেডিয়ান,

$\therefore$ $6^g 25' = 6{\cdot}25^g = \frac{25^g}{4} = \frac{\pi^c}{200} \times \frac{25}{4} = \frac{\pi^c}{32}$.

উদাহরণ 2. (a) $\frac{5}{12}\pi^c$ এবং (b) $\frac{9}{8}\pi^c$কে ষষ্ঠিক মানে প্রকাশ কর।

(a) $\because$ $1^c = \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রি, $\therefore$ $\frac{5}{12}\pi^c = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{5\pi}{12} = 75^\circ$.

(b) $\because$ $1^c = \frac{180^\circ}{\pi}$, $\therefore$ $\frac{9\pi^c}{8} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{9\pi}{8} = \frac{45 \times 9}{2}$ ডিগ্রি $= \frac{405^\circ}{2}$

$= 2$ সমকোণ $22^\circ 30'$.

উদাহরণ 3. $\frac{\pi^c}{12}$কে শতক মানে প্রকাশ কর।

$\because$ $1^c = \frac{200^g}{\pi}$, $\therefore$ $\frac{\pi^c}{12} = \frac{200^g}{\pi} \times \frac{\pi}{12} = \frac{50^g}{3} = 16{\cdot}\dot{6}^g = 16^g 66' 66{\cdot}\dot{6}''$

উদাহরণ 4. সুষম পঞ্চভুজের অন্তঃকোণের পরিমাণকে কোণ মাপিবার তিন প্রকার পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

যে কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $+4$ সমকোণ

$=$বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ।

$\therefore$ সুষম পঞ্চভুজের 5টি সমান অন্তঃকোণের সমষ্টি $+4$ সমকোণ $=10$ সমকোণ।

$\therefore$ উহার 5টি সমান অন্তঃকোণের সমষ্টি $=6$ সমকোণ,

$\therefore$ প্রত্যেক অন্তঃকোণের পরিমাণ $=\frac{6}{5}$ সমকোণ।

কিন্তু 1 সমকোণ $=90^\circ=100^g=\dfrac{\pi^c}{2}$,

$\therefore$ প্রত্যেক অন্তঃকোণ $=\dfrac{6}{5}\times 90^\circ=108^\circ$

অথবা $=\dfrac{6}{5}\times 100^g=120^g$

অথবা $=\dfrac{6}{5}\times\dfrac{\pi^c}{3}=\dfrac{3\pi}{5}$ রেডিয়ান।

উদাহরণ 5. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের অন্তর $\dfrac{\pi}{6}$ রেডিয়ান। ঐ কোণ দুইটিকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

মনে কর, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ ও $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ, সুতরাং এখানে $\angle A+\angle B=90^\circ \cdots (1)$,

এবং $\angle A-\angle B=\dfrac{\pi}{6}$ রেডিয়ান (স্বীকার) $=\dfrac{\pi}{6}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=30^\circ\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2\angle A=120^\circ$, $\therefore$ $\angle A=60^\circ$,

সুতরাং $\angle B=30^\circ$.

উদাহরণ 6. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর শ্রেণী এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ। কোণগুলিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। [C. U. '51]

মনে কর, ক্ষুদ্রতম কোণটি x ডিগ্রি, সুতরাং বৃহত্তম কোণটি $2x$ ডিগ্রি।

$\because$ কোণগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore$ অবশিষ্ট কোণটি $=\dfrac{1}{2}(x+2x)$ বা $\dfrac{3x}{2}$ ডিগ্রী।

অতএব, $x+\dfrac{3x}{2}+2x=180^\circ$, বা, $\dfrac{9x}{2}=180^\circ=\pi$ রেডিয়ান

$\therefore$ $x=\dfrac{2\pi^c}{9}$. $\therefore$ কোণগুলি যথাক্রমে $\dfrac{2\pi}{9}$, $\dfrac{\pi}{3}$ ও $\dfrac{4\pi}{9}$ রেডিয়ান।

কোণ পরিমাণ সম্বন্ধে বিবিধ সমাধান

উদা. 1. দুইটি কোণের সমষ্টি 135° এবং তাহাদের অন্তর 100^g. কোণ দুইটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। [G. U. '50]

মনে কর, কোণ দুইটি যথাক্রমে x ও y ডিগ্রি।

$100^g = 90°$, সুতরাং $\left.\begin{array}{r} x+y=135° \\ \text{এবং } x-y=90° \end{array}\right\}$

$\therefore \quad 2x = 225°$

$\therefore \quad x = \dfrac{225°}{2} = 112\frac{1}{2}°$ এবং $y = 135° - \dfrac{225°}{2} = 22\frac{1}{2}°$.

$\therefore$ একটি কোণ $= \dfrac{225°}{2} = \dfrac{225}{2} \times \dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \dfrac{5\pi}{8}$ রেডিয়ান,

এবং অন্য কোণটি $= \dfrac{45°}{2} = \dfrac{45}{2} \times \dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \dfrac{\pi}{8}$ রেডিয়ান।

উদা. 2. দুইটি কোণের সমষ্টি 114° ; যদি একটি কোণ যত গ্রেড অন্যটি তত ডিগ্রি হয়, তবে কোণগুলির বৃত্তীয়মান নির্ণয় কর। [C. U. '40]

মনে কর, একটি কোণ $x°$, সুতরাং অন্য কোণটি $= x^g = \dfrac{9x°}{10}$.

এক্ষণে, $x° + \dfrac{9x°}{10} = 114°$, বা $\dfrac{19x}{10} = 114$, $\quad \therefore \quad x = \dfrac{114 \times 10}{19} = 60$.

$\therefore$ একটি কোণ $60° = 60 \times \dfrac{\pi^c}{180} = \dfrac{\pi^c}{3}$,

এবং অপর কোণটি $= 60^g = 60 \times \dfrac{\pi^c}{200} = \dfrac{3\pi^c}{10}$.

উদা. 3. পৃথিবীকে যদি 7920 মাইল ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলক ধরা হয়, তবে কত দৈর্ঘ্যের চাপ উহার কেন্দ্রে এক মিনিট পরিমাণ সম্মুখ-কোণ উৎপন্ন করিবে? $(\pi = \frac{22}{7})$। [C. U. '48]

চাপ $= r\theta$. এখানে $r =$ ব্যাসার্ধ $= \frac{7920}{2}$ মাইল

এবং $\theta =$ কেন্দ্রস্থ কোণ $= 1' = \dfrac{1}{60}$ ডিগ্রি $= \dfrac{1}{60} \times \dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore$ চাপের দৈর্ঘ্য $= r\theta = \dfrac{7920}{2} \times \dfrac{1}{60} \times \dfrac{22}{7 \times 180}$ মাইল

$= \frac{121}{105}$ মাইল $= 1\frac{16}{105}$ মাইল।

[**দ্রষ্টব্য :** চাপ $= r\theta$ এই সূত্রে θ কোণটি সর্বত্র θ রেডিয়ান বুঝিবে।]

উদা. 4. পৃথিবীর ব্যাস 8000 মাইল হইলে এক নৌ-মাইলের (Nautical mile) পরিমাণ কত? [$\pi=3{\cdot}1416$].

দ্রাঘিমার যে-চাপ পৃথিবীর কেন্দ্রে 1 মিনিট সম্মুখ-কোণ উৎপন্ন করে, তাহার দৈর্ঘ্যকে এক নৌ-মাইল (Nautical mile) বলে।

চাপ $=r\theta$; এখানে $r=\frac{8000}{2}$ মাইল $=4000$ মাইল

এবং $\theta=1'=\frac{1}{60}$ ডিগ্রি $=\frac{\pi}{60\times180}$ রেডিয়ান,

$\therefore$ চাপ বা নৌ-মাইল $=r\theta=4000\times\frac{\pi}{60\times180}$ মা. $=\frac{4000\times3{\cdot}1416}{60\times180}$ মা.

$=\frac{10{\cdot}472}{9}$ মা. $=1{\cdot}16$ মাইল (আসন্ন)।

উদা. 5. একটি অশ্ব 27 ফুট ব্যাসার্ধের কোন বৃত্তাকার পথে দৌড়াইয়া 3 সেকেণ্ডে কেন্দ্রে 70° কোণ ধারণক্ষম চাপ অতিক্রম করে। অশ্বটি অর্ধ মিনিটে কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে? ($\pi=\frac{22}{7}$)। [C. U. '51]

চাপ $=r\theta$; এখানে $r=27$ ফুট, $\theta=70°=\frac{70\times\pi}{180}$ রেডিয়ান

$=\frac{70}{180}\times\frac{22}{7}$ রেডিয়ান $=\frac{11}{9}$ রেডিয়ান

$\therefore$ চাপ $=r\theta=27\times\frac{11}{9}$ ফুট $=33$ ফুট ;

অতএব ঘোড়াটি 3 সেকেণ্ডে 33 ফুট যায়,

ঘোড়াটি $\frac{1}{2}$ মি. বা 30 সেকেণ্ডে 330 ফুট যাইবে।

উদা. 6. 4টা ও 5টার মধ্যে কোন্ কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটির মধ্যবর্তী কোণ (i) 72° ও (ii) $\frac{8\pi}{15}$ রেডিয়ান হয়?

ঘড়ির সমগ্র পরিধি কেন্দ্রে 360° কোণ উৎপন্ন করে। আবার, এই সমগ্র পরিধি 60 মিনিট-ঘরের সমান।

এক্ষণে, 360° = 60 মিনিট-ঘর পরিমাণ চাপের সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ,

$\therefore$ 72° = 12 মিনিট ঘর " " " " "

সুতরাং উভয় কাঁটার অন্তর 12 মিনিট-ঘর হইবে। 4টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 20 মিনিট-ঘর পিছনে ছিল। অতএব, যদি মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা (20−12) বা 8 মিনিট-ঘর অথবা (20+12) বা 32 মিনিট-ঘর বেশী যায়, তবে উভয় কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ 72° হইবে।

মিনিটের কাঁটা 55 মিনিট-ঘর বেশী যায় 60 মিনিটে,

$\therefore$ „ 8 „ „ „ $\frac{60\times 8}{55}$ বা $\frac{96}{11}$ বা $8\frac{8}{11}$ মিনিটে।

আবার, „ 32 „ „ „ $\frac{60\times 32}{55}$ বা $34\frac{10}{11}$ মিনিটে।

অতএব, 4টা $8\frac{8}{11}$ মিনিটে এবং 4টা $34\frac{10}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 72° হইবে।

(ii) $\frac{8\pi}{15}$রেডিয়ান$=\frac{8\pi}{15}\times\frac{180^\circ}{\pi}=96^\circ$.

360° কোণ হইলে চাপের পরিমাণ 60 মিনিট-ঘর হয়,

$\therefore$ 96° „ „ „ „ $\frac{60}{360}\times 96$ বা 16 মিনিট-ঘর হয়।

[বাকী অংশ পূর্বের মত কর।] উত্তর$=$4টা $4\frac{4}{11}$ মিনিট এবং 4টা $39\frac{3}{11}$ মিনিট]

Exercise 1

1. ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :—
   (i) 13214″ (ii) 507·5′ (iii) ·24 সমকোণ।

2. গ্রেড, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :—
   (i) $46235^{``}$ (ii) $703{\cdot}3^{`}$ (iii) $10{\cdot}7205^{g}$ (iv) ·03246 সমকোণ।

3. সমকোণে পরিণত কর :—
   (i) 30° (ii) 60°45′ (iii) 135^{g} (iv) 360°20′48″
   (v) $50^{g}35^{`}24^{``}$ (vi) $\frac{x^c}{3}$ (vii) $10\pi^c$.

4. নিম্নের কোণগুলিকে শতক মানে প্রকাশ কর :—
   (i) 30°12′36″ (ii) 63°14′51″ (iii) 60°6′45″ (iv) $\frac{3\pi^c}{5}$ (v) $\frac{\pi^c}{12}$.

6. নিম্নের কোণগুলিকে ষষ্টিক মানে প্রকাশ কর :—
   (i) $40^{g}35^{`}24^{``}$ (ii) $60^{g}25^{``}$ (iii) $4^{g}45^{`}36^{``}$
   (iv) 2^c (v) $\frac{5}{9}\pi^c$ (vi) $\frac{2\pi^c}{3}$.

6. নিম্নের কোণগুলিকে রেডিয়ানে পরিণত কর :—
   (i) 30° (ii) 75°30′ (iii) 45°25′36″ (iv) 120^{g}
   (v) $70^{g}40^{`}$ (vi) $325^{g}25^{`}72^{``}$.

7. দুটি কোণের সমষ্টি 60 গ্রেড এবং তাহাদের অন্তর 16°. কোণ দুইটিকে ডিগ্রিতে ও গ্রেডে প্রকাশ কর।

8. দুইটি কোণের সমষ্টি 140° এবং অন্তর 90°, কোণ দুইটিকে ডিগ্রিতে ও রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

9. দুইটি কোণের অনুপাত 5 : 3 এবং তাহাদের অন্তর (i) 40°, (ii) 100^g, (iii) $12\pi^c$; কোণগুলি নির্ণয় কর।

10. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $48^\circ47'28''$ ও $71^\circ12'32''$; তৃতীয় কোণটির শতকীয় মান কত?

11. দুইটি কোণের সমষ্টি 152° এবং একটির পরিমাণ যত ডিগ্রি অন্যটির পরিমাণ তত গ্রেড। কোণগুলির বৃত্তীয়মান কত?

12. এক সমকোণকে এইরূপ দুইভাগে বিভক্ত কর যেন একটির ডিগ্রিসংখ্যার ও অপরটির গ্রেড সংখ্যার অনুপাত 3 : 10 হয়।

13. ত্রিভুজের কোণত্রয়ের অনুপাত 4 : 3 : 5. ক্ষুদ্রতম কোণটির বৃত্তীয়মান কত?

14. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $\frac{3x}{20}$ ও 70^g. তৃতীয় কোণটি কত ডিগ্রি? [C. U.]

15. $88^\circ16'$ কোণকে এরূপ দুইভাগে বিভক্ত কর যেন একটির ষষ্টিক সেকেণ্ড সংখ্যা অন্যটির শতকীয় সেকেণ্ড সংখ্যার সমান হয়।

16. কোন চতুর্ভুজের চারিটি কোণ একটি সমান্তর শ্রেণী এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ। ক্ষুদ্রতম কোণটির বৃত্তীয়মান কত? [B. U.]

17. একটি চতুর্ভুজের কোণগুলি x°, 60°, 60^g ও $\frac{5}{6}\pi^c$ হইলে x-এর মান কত? [B. U.]

18. কোন সুষম n-ভুজের একটি অন্তঃকোণের বৃত্তীয়মান কত? [C.U.]

19. দুইটি কোণের অন্তর 1° এবং তাহাদের বৃত্তীয়মান দুইটির সমষ্টি 1 ; কোণ দুইটিকে ডিগ্রিতে নির্ণয় কর। [M. U.]

20. প্রমাণ কর যে, সুষম দ্বাদশভুজের একটি অন্তঃকোণের পরিমাণ যত ডিগ্রি সুষম অষ্টভুজের একটি অন্তঃকোণের পরিমাণ তত গ্রেড। [M. U.]

21. কোন পঞ্চভুজের কোণগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের তিন গুণ। ঐ কোণগুলি ডিগ্রিতে ও রেডিয়ানে নির্ণয় কর। [B.U.]

22. কোন বৃত্তের পরিধি 176 গজ, উহার ব্যাসার্ধ কত? $(\pi = \frac{22}{7})$

23. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7" ; উহার 11" দীর্ঘ চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখ-কোণের পরিমাণ কত?

24. ব্যাসার্ধ 17·6″ হইলে যে চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণ $22\frac{1}{2}°$, তাহার দৈর্ঘ্য কত? $(\pi=\frac{22}{7})$।

25. এক ইঞ্চি ব্যাস-বিশিষ্ট মুদ্রার পরিধি কত ইঞ্চি? $(\pi=\frac{22}{7})$।

26. 2618 ফুট দীর্ঘ একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। $(\pi=3·1416)$। [C. U.]

27. 5 গজ 1 ফুট 6 ইঞ্চি দীর্ঘ বৃত্তচাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণ $1·8^c$ হইলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ইঞ্চি?

28. পৃথিবী হইতে সূর্যের দূরত্ব 92,000,000 মাইল হইলে এবং পৃথিবী পৃষ্ঠে কোন বিন্দুতে সূর্যের ব্যাস 32′ কোণ উৎপন্ন করিলে সূর্যের ব্যাসটি নির্ণয় কর। $(\pi=\frac{22}{7})$।

29. বৃত্তের পরিধি : ব্যাস : : 333 : 106; কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 48 ফুট এবং উহার একটি চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণ 66°15′ হইলে, ঐ চাপের দৈর্ঘ্য কত? [C. U.]

30. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4000 মাইল। উহার যে চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণ 5″ তাহার দৈর্ঘ্য মাইলে নির্ণয় কর। [C. U. 1877]

31. যদি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 4000 মাইল ধরা হয় এবং পৃথিবী-পৃষ্ঠের একটি স্থান অন্য একটি স্থানের 100 মাইল উত্তরে অবস্থিত থাকে, তবে ঐ দুই স্থানের দ্রাঘিমার অন্তর কত? [$\pi=3·14159\cdots$]

32. একটি ঘড়ির বড় কাঁটাটির দৈর্ঘ্য 2 ফুট 4 ইঞ্চি। উহার প্রান্তভাগ 20 মিনিটে কত ইঞ্চি ঘুরিবে? [$\pi=3·1416$]। [C. U. '48]

33. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ শীর্ষকোণের 12 গুণ। উহার কোণগুলিকে ডিগ্রি-মিনিটে এবং গ্রেডে প্রকাশ কর। [C. U. '46]

34. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী। উহার বৃহত্তম কোণটি যত ডিগ্রি, ক্ষুদ্রতম কোণটি তত গ্রেড। ডিগ্রিতে কোণগুলি নির্ণয় কর। [C.U. '44]

35. একটি কোণের ডিগ্রি, গ্রেড ও রেডিয়ান সংখ্যা যথাক্রমে x, y ও z; প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{90}=\frac{y}{100}=\frac{2z}{\pi}$. [C. U. '41, '45; G. U. '51]

36. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 6″; উহার 9″ চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখ কোণের পরিমাণ কত?

37. কোন বৃত্তের 17 গজ 1 ফুট 3 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের একটি চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণটি 1·9 রেডিয়ান। ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ইঞ্চি? [C. U. '49]

38. কোন মিলের 28 ফুট দীর্ঘ পালটি মিনিটে 10 বার ঘুরিয়া থাকে। উহার প্রান্তভাগ এক ঘণ্টায় কত দূরত্ব অতিক্রম করে? ($\pi = \frac{22}{7}$)।

39. যদি ভূমণ্ডলের ব্যাসার্ধ (4000 মাইল) সূর্যপৃষ্ঠে কোন বিন্দুতে 8·6″ সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে, তবে ভূমণ্ডল হইতে সূর্যের দূরত্ব কত? [C. U.]

40. এক ব্যক্তি কোন বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে দৌড়াইয়া কেন্দ্রে 56° সম্মুখ-কোণ ধারণক্ষম চাপ 36 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। ঐ বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় কর। ($\pi = \frac{22}{7}$)। [C. U. '45]

41. প্রাতে 9টা 30 মিনিটের সময় ঘড়ির কাঁটা দুইটির মধ্যবর্তী কোণের বৃত্তীয়মান নির্ণয় কর। [C. U. '48]

42. তিনটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 এবং l_1, l_2, l_3 দৈর্ঘ্যের চাপ তিনটি বৃত্ত তিনটির কেন্দ্রে যে কোণত্রয় উৎপন্ন করে তাহাদের বৃত্তীয়মান যথাক্রমে a_1, a_2, a_3. প্রমাণ কর যে, যে-বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\frac{1}{n}(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)$ তাহার কেন্দ্রে $l_1+l_2+l_3$ দৈর্ঘ্যের চাপ n রেডিয়ান পরিমাণ সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে।
[C. U. '40]

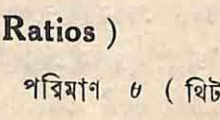
43. অপরাহ্ণ 1টা ও 2টার মধ্যে কোন্ সময় ঘড়ির কাঁটা দুইটির অন্তর্ভূত কোণ $186\frac{2}{3}$ গ্রেড হইবে? [C. U. '51]

44. $5\frac{1}{2}$ ফুট লম্বা একটি লোককে অর্ধ মাইল দূর হইতে দেখা গেল। লোকটি কি পরিমাণ সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিয়াছে? [W. B. S. F. '52]

45. যদি দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রে দুইটি সমান দৈর্ঘ্যের চাপ যথাক্রমে 60° ও 75° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে, তবে ঐ বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর।
[W. B. S. F. '53]

কোণানুপাত (Trigonometrical Ratios)

11. **সংজ্ঞা :** মনে কর, AOB এই কোণটির পরিমাণ θ (থিটা)। OB বাহুর যে কোন বিন্দু P হইতে OA-র উপর PM লম্ব টানা হইয়াছে। এখন POM সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ θ-র সম্পর্কে PMকে ইহার লম্ব, OMকে ভূমি এবং OPকে অতিভুজ বলে। আবার, P সূক্ষ্মকোণের সম্পর্কে OMকে ইহার লম্ব, PMকে ভূমি এবং OPকে অতিভুজ বলিতে হইবে।



চিত্র নং 5

এখন $\angle POM$ বা θ কোণের কোণানুপাতগুলি নিম্নলিখিত রূপ হইবে :—

$\frac{PM}{OP}\left(\text{অর্থাৎ}\ \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}\right)=\theta$ কোণের **সাইন** (Sine)

$\frac{OM}{OP}\left(\text{অর্থাৎ}\ \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}\right)=$,, ,, **কোসাইন** (Cosine)

$\frac{PM}{OM}\left(\text{অর্থাৎ}\ \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}\right)=$,, ,, ট্যানজেণ্ট (Tangent)

$\frac{OM}{PM}\left(\text{অর্থাৎ}\ \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}\right)=$,, ,, কোট্যান্‌জেণ্ট (Cotangent)

$\frac{OP}{PM}\left(\text{অর্থাৎ}\ \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}\right)=$,, ,, কোসেকাণ্ট (Cosecant)

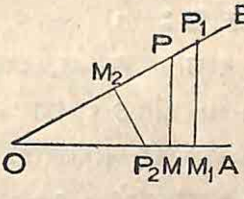
$\frac{OP}{OM}\left(\text{অর্থাৎ}\ \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}\right)=$,, ,, সেকাণ্ট (Secant)

সংক্ষেপে এই অনুপাতগুলিকে **সাইন** θ ($\sin\theta$), **কস** θ ($\cos\theta$), **ট্যান** θ ($\tan\theta$), **কট** θ ($\cot\theta$), কোসেক θ ($\operatorname{cosec}\theta$) এবং সেক θ ($\sec\theta$) লেখা হয়।

এইগুলি ব্যতীত $1-\cos\theta$কে **ভার্স** θ (vers θ) এবং $1-\sin\theta$কে **কোভার্স** θ (co-vers θ) বলে।

12. প্রমাণ কর যে একই কোণের কোণানুপাতগুলি সর্বদাই সমান।

6নং চিত্রে AOB কোণের OB বাহুর উপর অপর যে কোন বিন্দু P_1 হইতে OA বাহুর উপর P_1M_1 লম্ব টানা হইল। এক্ষণে দেখান হইবে যে ΔPOM হইতে AOB কোণের যে-কোণানুপাতগুলি পাওয়া গিয়াছিল ΔP_1OM_1 হইতেও তাহাই পাওয়া যায়। POM ও P_1OM_1 এই ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle O$ সাধারণ কোণ, $\angle M=\angle M_1$ (সমকোণ বলিয়া), সুতরাং অবশিষ্ট $\angle P=\angle P_1$.



চিত্র নং 6

অতএব ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$$\therefore\ \frac{PM}{OP}=\frac{P_1M_1}{OP_1},\ \frac{OM}{OP}=\frac{OM_1}{OP_1},\ \frac{PM}{OM}=\frac{P_1M_1}{OM_1},\ \cdots\text{ইত্যাদি।}$$

অতএব প্রমাণিত হইল যে, OB-র উপর P বিন্দুর যে কোন অবস্থিতিতে O-কোণের কোণানুপাতগুলি সমান হইবে।

এইরূপে যদি OA রেখার উপরিস্থ কোন বিন্দু P_2 হইতে OB-র উপর P_2M_2 লম্ব টানা হয়, তাহা হইলে ΔOP_2M_2 হইতে $\angle O$-র যে কোণানুপাতগুলি পাওয়া যায় সেগুলিও পূর্ব কোণানুপাতগুলির সমান। কারণ, ΔPOM এবং ΔP_2OM_2 সদৃশকোণী বলিয়া উহাদের অনুরূপ বাহুগুলিও সমানুপাতী।

13. কোণানুপাতগুলির পরস্পর সম্পর্ক।

লক্ষ্য কর যে, সাইনের $\left(\frac{PM}{OP}\right)$ বিপরীত কোসেক $\left(\frac{OP}{PM}\right)$, কসের $\left(\frac{OM}{OP}\right)$ বিপরীত সেক $\left(\frac{OP}{OM}\right)$ এবং ট্যানের $\left(\frac{PM}{OM}\right)$ বিপরীত কট $\left(\frac{OM}{PM}\right)$.

অতএব, এইগুলি ভালরূপে মনে রাখিবে :

(i) $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\therefore \sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1.$

(ii) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\therefore \cos\theta \times \sec\theta = 1.$

(iii) $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$, $\therefore \tan\theta \times \cot\theta = 1.$

(iv) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

[**দ্রষ্টব্য** :—(i) $\sin\theta$, $\cos\theta$ প্রভৃতি দ্বারা অনুপাত বুঝায় বলিয়া ইহারা এক একটি সংখ্যা। অতএব, যোগ বিয়োগ গুণ ভাগের নিয়ম ইহাদের প্রতি প্রযুক্ত হইবে। (ii) $\sin\theta$-র দ্বারা একটি সংখ্যা বুঝায়, ইহার অর্থ $\sin \times \theta$ হইবে না। (iii) a ও b এই সংখ্যাদ্বয়ের যোগবিয়োগ প্রভৃতি যেরূপ হয়, সেইরূপে $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-র যোগফল $\sin\theta + \cos\theta$, উহাদের অন্তর $\sin\theta - \cos\theta$, উহাদের গুণফল $\sin\theta\cos\theta$ এবং ভাগফল $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ হয় অতএব, $\sin\theta \times \sin\theta = (\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ এবং $\sin\theta \times 2 = 2\sin\theta$. (iv) আরও দেখ $(\sin\theta)^2$ এর পরিবর্তে $\sin^2\theta$ এইভাবে লিখিতে হয়, কিন্তু $\sin\theta^2$ লিখিলে অন্য অর্থ বুঝাইবে। আবার, $2\sin\theta$ এবং $\sin 2\theta$ এক নহে। প্রথমটির অর্থ $\sin\theta$-র দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয়টির অর্থ θ র দ্বিগুণ কোণের sine.

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্বন্ধীয় অভেদাবলী

14. নিম্নের প্রয়োজনীয় সূত্রগুলি (বা অভেদগুলি বিশেষভাবে) স্মরণ রাখিতে হইবে। যথা—(i) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, (ii) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

(iii) $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$, (iv) $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$. ইহাদের প্রমাণ নিম্নে দেখ।

(i) **প্রমাণ :** [5নং চিত্রটি এখানে আঁক]

মনে কর OB রেখা-স্থিত P বিন্দু হইতে $PM\perp OA$.

$\because$ $PM\perp OM$, $\therefore$ $\sin\theta=\frac{PM}{OP}$, $\cos\theta=\frac{OM}{OP}$, এবং $\tan\theta=\frac{PM}{OM}$.

এক্ষণে, $\tan\theta=\frac{PM}{OM}=\dfrac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$ (লব ও হরকে OP দ্বারা ভাগ করিয়া)

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

(ii) প্রমাণ কর যে, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$. [E. B. S. B. '30]

[5নং চিত্র আঁক] চিত্রে $\angle M$ সমকোণ বলিয়া $PM^2+OM^2=OP^2$,

$\therefore$ $\frac{PM^2}{OP^2}+\frac{OM^2}{OP^2}=\frac{OP^2}{OP^2}$ (উভয় পক্ষকে OP^2 দ্বারা ভাগ করিয়া)

বা, $\left(\frac{PM}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2=1$; কিন্তু $\sin\theta=\frac{PM}{OP}$ এবং $\cos\theta=\frac{OM}{OP}$.

$\therefore$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

(iii) প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$.

[C. U. '49 ; E. B. S. B. '49]

5নং চিত্রে $\angle M$ সমকোণ বলিয়া $\sec\theta=\frac{OP}{OM}$, $\tan\theta=\frac{PM}{OM}$,

এবং $OP^2=PM^2+OM^2$.

$\therefore$ $\frac{OP^2}{OM^2}=\frac{PM^2}{OM^2}+\frac{OM^2}{OM^2}$, বা, $\left(\frac{OP}{OM}\right)^2=\left(\frac{PM}{OM}\right)^2+1$,

$\therefore$ $\sec^2\theta=\tan^2\theta+1$.

(iv) 5নং চিত্রে $OP^2=PM^2+OM^2$,

এবং $\operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{PM}$, $\cot\theta=\frac{OM}{PM}$.

এক্ষণে, ∵ $OP^2 = PM^2 + OM^2$, ∴ $\frac{OP^2}{PM^2} = \frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2}$.

বা, $\left(\frac{OP}{PM}\right)^2 = 1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)$, ∴ $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$.

বিবিধ অভেদের সমাধান

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1 = 2\sin^2\theta$.

$\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1 = (\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2 + 1$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + 1$

$= 1 \times (\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \sin^2\theta + \cos^2\theta$ [∵ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$= \sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$.

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\cot A + \tan A} = \sin A \cos A$. [C. U. '46]

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cos A}} = \frac{1}{\frac{1}{\sin A \cos A}}$$

$= \sin A \cos A$.

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$.

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{(1 - \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta}}.$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$= \sec\theta - \tan\theta$.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $(\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$. [C. U. '51]

$$\text{বামপক্ষ} = \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{1 - \sin^2\theta}{\sin\theta} \times \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta \sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \times \frac{1}{\sin\theta \cos\theta} = \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta}{\sin^2\theta \cos^2\theta} = 1.$$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}-\frac{1}{\cos\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$. [C. U. '44 ; G. U. '51]

$$\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}=\frac{\sec\theta-\tan\theta+\sec\theta+\tan\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\sec\theta}{1}=2\sec\theta=\frac{2}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}.$$

এক্ষণে পক্ষান্তর করিয়া পাই

$$\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}.$$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}$.

বামপক্ষ$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)+(\tan^2\theta-\sec^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

[$\because$ $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$. $\therefore$ $-1=\tan^2\theta-\sec^2\theta$]

$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)(1+\tan\theta-\sec\theta)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)}=\tan\theta+\sec\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}.$$

উদা. 7. যদি $\sin A+\sin^2 A=1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$\cos^2 A+\cos^4 A=1$. [E. B. S. B. '51]

$\because$ $\sin A+\sin^2 A=1$, $\therefore$ $\sin A=1-\sin^2 A=\cos^2 A$,

$\therefore$ $\sin^2 A=\cos^4 A$.

এক্ষণে, $\cos^2 A+\cos^4 A=\cos^2 A+\sin^2 A=1$.

উদা. 8. সরল কর : $\frac{(\sin A+\cos A)(1-\sin A\cos A)}{\sin^3 A+\cos^3 A}$

প্রদত্ত ভগ্নাংশ$=\frac{(\sin A+\cos A)(\sin^2 A+\cos^2 A-\sin A\cos A)}{\sin^3 A+\cos^3 A}$.

$$=\frac{\sin^3 A+\cos^3 A}{\sin^3 A+\cos^3 A}=1.$$

উদা. 9. সরল কর : $\cos^2 B\operatorname{cosec}^2 A-\sin^2 B\cot^2 A$
$-\cos^2 B\cot^2 A+\sin^2 B\operatorname{cosec}^2 A$. [C. U. '45]

প্রদত্ত রাশি$=\cos^2 B(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)+\sin^2 B(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)$.

$=(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)(\cos^2 B+\sin^2 B)=1\times1=1.$

উদা. 10. সরল কর : $\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\frac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}$. [C.U. '42, '44]

প্রদত্ত রাশি $=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B+\cos^2 A-\cos^2 B}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$$=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)-(\sin^2 B+\cos^2 B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$$

$$=\frac{1-1}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}=0.$$

Exercise 2

নিম্নের অভেদগুলি প্রমাণ কর :

1. $\cos^4\theta-\sin^4\theta=2\cos^2\theta-1.$
2. $\cos A+\tan A\sin A=\sec A.$ [C. U. '50]
3. $\frac{1}{\sin A\cos A}=\tan A+\cot A.$ [E.B.S.B. '48]
4. $\cos^6 A+\sin^6 A+3\sin^2 A\cos^2 A=1.$
5. $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta.$ C. U. '43]
6. $\tan^2 A\cot A+\cot^2 A\tan A=\sec A\operatorname{cosec} A.$
7. $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta.$ [E. B. S. B. '50]
8. $\sec^4\theta-\sec^2\theta=\tan^4\theta+\tan^2\theta.$
9. $\sec^4 A-2\tan^2 A=1+\tan^4 A.$
10. $\operatorname{cosec}^4\theta-\cot^4\theta-1=2\cot^2\theta.$
11. $\sin^2\theta(1+\cot^2\theta)+\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)=2.$ [C. U. '51]
12. $\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A=\tan^2 A+\cot^2 A+2.$ [C. U. '40]
13. $\sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}=\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta.$
14. $1+\frac{\cot^2 A}{1+\operatorname{cosec} A}=\operatorname{cosec} A.$ [C. U. '47]
15. $4\tan^2 A+3=3\sec^2 A+\tan^2 A$
16. $1+\frac{\cos A}{\sec A}+\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A}=2.$

17. $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$ [G.U. '52]

18. $\text{cosec}^2 A\cos^2 B-\cot^2 A\sin^2 B+\text{cosec}^2 A\sin^2 B$
$-\cot^2 A\cos^2 B=1.$

19. $\sec^2 A\,\text{cosec}^2 A=\tan^2 A+\cot^2 A+2.$ [C. U. '40]

20. $\sqrt{\sec^2 A-1}=\sin A\sec A.$ 21. $\dfrac{\tan\theta+\cot A}{\cot\theta+\tan A}=\cot A\tan\theta.$

22. $\dfrac{\sec^4\theta-2\sec^2\theta\tan^2\theta+\tan^4\theta}{\text{cosec}^4\theta-2\,\text{cosec}^2\theta\cot^2\theta+\cot^4\theta}=1.$ [C.U. '43]

23. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A.$

24. $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}.$ [C.U. '42]

$\dfrac{1}{\text{cosec}\,A+\cot A}+\dfrac{1}{\text{cosec}\,A-\cot A}=2\,\text{cosec}\,A.$

26. $\dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta+\cot\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\text{cosec}\,A-\cot\theta}.$

27. $(1+\tan^2 A)(1-\sin^2 A)=1.$ [C. U.]

28. $(1+\tan\theta-\sec\theta)(1+\cot\theta+\text{cosec}\,\theta)=2.$

29. $\dfrac{1}{1+\cos^2 A}+\dfrac{1}{1+\sec^2 A}=1.$

30. $\cos^2 A-\sin^2 A=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$ [G.U. '50]

31. $\dfrac{\cot A+1}{\cot A-1}=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$ 32. $1+\dfrac{\tan^2\theta}{1+\sec\theta}=\sec\theta$

33. $\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A+\sin B}=\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}.$

34. $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}+\dfrac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A.$

35. $\dfrac{\cot\theta+\text{cosec}\,\theta-1}{\cot\theta-\text{cosec}\,\theta+1}=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$

36. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0.$

37. $\dfrac{\text{cosec}\,A}{\text{cosec}\,A-1}+\dfrac{\text{cosec}\,A}{\text{cosec}\,A+1}=2\sec^2 A.$ [W.B.S.F. '53]

সরল কর :—

38. $\cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 B \sin^2 A.$ [C. U. '43]

39. $\dfrac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \dfrac{\cos A}{\sec A} + 1.$

40. $\dfrac{1-\tan\theta}{\cot\theta-1} - \dfrac{1+\tan\theta}{\cot\theta+1}.$

41. $\dfrac{\sec^4 A - 2\sec^2 A \tan^2 A + \tan^4 A}{\sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta}.$ [G.U. '49]

42. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A} - \dfrac{2}{\sin A}.$

43. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} + \dfrac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}.$

44. $\dfrac{\sec A - \sec B}{\tan B + \tan A} + \dfrac{\tan B - \tan A}{\sec A + \sec B}.$

45. $\dfrac{\sec^4 A - 2\sec^2 A \tan^2 A + \tan^4 A - 1}{\operatorname{cosec}^4 A - 2\operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A + \cot^4 A}.$ [C.U. '41]

46. যদি $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A.$

15. কোণানুপাতগুলিকে উহাদের কোন একটি অনুপাত দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

কোণানুপাতগুলিকে sine দ্বারা প্রকাশ কর।

[প্রথম প্রণালী] $\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta.$

$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta};$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$; $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$;

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$; $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}.$

[অন্য প্রণালী] 5নং চিত্রে মনে কর, $\angle AOP = \theta$, $OP = 1$ দৈর্ঘ্য একক এবং $PM = a$ দৈর্ঘ্য একক।

$\therefore \sin\theta = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{a}{1} = a. \quad \because OP^2 = PM^2 + OM^2,$

$\therefore OM^2 = OP^2 - PM^2 = 1 - a^2, \quad \therefore OM = \sqrt{1-a^2}.$

এক্ষণে, $\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{1}=\sqrt{1-\sin^2\theta}$;

$\tan\theta=\frac{PM}{OM}=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ ইত্যাদি।

[দ্রষ্টব্য : যে অনুপাতে প্রকাশ করিতে হইবে তাহার মান যেন a একক হয় এরূপভাবে ত্রিভুজের বাহুগুলির মান ধরিবে।]

16. কোন প্রদত্ত অনুপাত হইতে অন্য কোণানুপাতগুলি নির্ণয় :

উদা. 1. যদি $\sin A=\frac{1}{3}$ হয়, তবে cos A, tan A এবং sec A-এর মান নির্ণয় কর।

এখানে, $\sin A=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{1}{3}$,

5নং চিত্রে মনে কর, PM=1 দৈর্ঘ্য একক এবং OP=3 দৈর্ঘ্য একক।

$\therefore\ OM^2=OP^2-PM^2=9-1=8,\quad \therefore\ OM=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

এক্ষণে, $\cos A=\frac{OM}{OP}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan A=\frac{PM}{OM}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

এবং $\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

উদা. 2. যদি $\cos x=\frac{2}{3}$ হয়, তবে tan x, sec x ও cosec xএর মান কত? [D. B. '48]

5নং চিত্রে মনে কর, OM=2 দৈর্ঘ্য একক এবং OP=3 দৈর্ঘ্য একক।

অতএব $PM^2=OP^2-OM^2=3^2-2^2=9-4=5,\quad \therefore\ PM=\sqrt{5}.$

এক্ষণে, $\tan x=\frac{PM}{OM}=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec x=\frac{OP}{OM}=\frac{3}{2}$;

এবং $\text{cosec}\, x=\frac{OP}{PM}=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

উদা. 3. যদি $\cos\theta=\frac{3}{5}$ এবং θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে cot θ-র মান নির্ণয় কর। [C. U. '50]

এখানে $\cos\theta=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{3}{5}$. 5নং চিত্রে মনে কর, OM=3 দৈর্ঘ্য একক এবং OP=5 দৈর্ঘ্য একক। $\because\ PM^2+OM^2=OP^2$,

$\therefore\ PM^2=OP^2-OM^2=5^2-3^2=16,\quad \therefore\ PM=4.$

$\therefore\ \cot\theta=\frac{OM}{PM}=\frac{3}{4}.$

উদা. 4. যদি কোন সূক্ষ্ম কোণের cosine-এর মান $\sqrt{1-a^2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে উহার cotangent-এর মান $\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ হইবে।

মনে কর, কোণটি θ ; সুতরাং $\cos\theta=\sqrt{1-a^2}$ (স্বীকার)।

$\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad \therefore\ \sin^2\theta+(\sqrt{1-a^2})^2=1.$

বা, $\sin^2\theta+1-a^2=1$, বা, $\sin^2\theta=a^2\quad \therefore\ \sin\theta=a,$

আবার, $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$

Exercise 3

1. সমস্ত কোণানুপাতকে cosine-এ প্রকাশ কর।
2. যদি $\sin A=\frac{3}{5}$ হয়, তবে tan A ও sec A-এর মান কত ?
3. ,, $\cos A=\frac{12}{13}$,, ,, cot A ও cosec A-এর মান কত ?
4. ,, $\tan A=\frac{3}{4}$,, ,, sin A ও sec A-র মান কত ?
5. ,, $\cot A=\sqrt{7}$,, ,, $\dfrac{\operatorname{cosec}^2A-\sec^2A}{\operatorname{cosec}^2A+\sec^2A}$-এর মান কত ?
6. ,, $\sec A=\frac{61}{11}$,, ,, tan A ও cosec A-এর ,, ,,
7. ,, $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,, ,, প্রমাণ কর যে $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.
8. ,, $\cos A=\frac{3}{5}$,, ,, ,, ,, ,, $\tan\theta=\frac{4}{3}$.
9. ,, $\sec A=\frac{4}{3}$,, ,, ,, ,, ,, $\cot A=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.
10. ,, $\cot A=\dfrac{x}{y}$,, ,, ,, ,, ,, $\operatorname{cosec} A=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$.

1. ,, $\operatorname{cosec} A=\dfrac{a}{b}$,, ,, ,, ,, ,, $\tan A=\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

12. কোন সূক্ষ্ম কোণের sine যদি x হয়, তবে প্রমাণ কর যে উহার cosine $=\sqrt{1-x^2}$ এবং tangent $=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
[C. U. '41 ; E. B. S. B. '50]

13. কোন কোণের tangent $\frac{4}{3}$ হইলে, অন্য কোণানুপাতগুলি নির্ণয় কর।
[E. B S. B. '50]

14. যদি cot A+cosec A=3 হয়, তবে cos A-র মান কত ?

15. যদি tan A+sec A= $\frac{2}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে sin A-র মান কত ?

---

17. কয়েকটি নির্দিষ্ট কোণের কোণানুপাত নির্ণয় :

(1) 30° কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় কর।

মনে কর, $\angle AOB = 30°$ এবং $PM \perp OA$. [চিত্র নং 7]

এখন $\angle OPM = 60°$ হইল। PMকে Q পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত কর যেন MQ=PM হয়। QO যোগ কর।

POM ও QOM ত্রিভুজ দুইটির PM=MQ, OM বাহু সাধারণ এবং $\angle OMP = \angle OMQ$ (সমকোণ বলিয়া) ; সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $\angle QOM = 30°$,

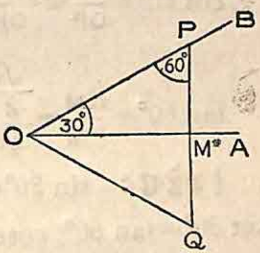
$\therefore$ $\angle POQ = 2\angle QOM = 60°$.

$\because$ OPQ ত্রিভুজের $\angle P$ ও $\angle POQ$ প্রত্যেকে 60°, $\therefore$ $\angle Q = 60°$,

$\therefore$ POQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore$ PO=PQ=2PM.

$\therefore$ $PM = \frac{1}{2}OP$.



চিত্র নং 7

আবার, $OM^2 = OP^2 - PM^2 = OP^2 - (\frac{1}{2}OP)^2 = OP^2 - \frac{1}{4}OP^2 = \frac{3}{4}OP^2$.

$\therefore$ $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}OP$. $\therefore$ $\sin 30° = \frac{PM}{OP} = \frac{\frac{1}{2}OP}{OP} = \frac{1}{2}$;

সুতরাং, $\operatorname{cosec} 30° = \frac{1}{\sin 30°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

$$\cos 30° = \frac{OM}{OP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}OP}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

সুতরাং, $\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$\tan 30° = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{1}{2}OP}{\frac{\sqrt{3}}{2}OP} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

সুতরাং, $\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$.

(2) 60° কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

(7নং চিত্রে) $\angle OPM=60°$, উহার সম্পর্কে লম্ব$=OM=\frac{\sqrt{3}}{2}OP$,

ভূমি$=PM=\frac{1}{2}OP$ এবং অতিভুজ$=OP$.

$$\therefore \sin 60°=\frac{OM}{OP}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}OP}{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

সুতরাং $\operatorname{cosec} 60°=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$\cos 60°=\frac{PM}{OP}=\frac{\frac{1}{2}OP}{OP}=\frac{1}{2}$; সুতরাং, $\sec 60°=\frac{1}{\cos 60°}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

$\tan 60°=\frac{OM}{PM}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}OP}{\frac{1}{2}OP}=\sqrt{3}$; সুতরাং $\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

[**দ্রষ্টব্য :** $\sin 30°=\cos 60°$, $\cos 30°=\sin 60°$, $\tan 30°=\cot 60°$, $\cot 30°=\tan 60°$, $\operatorname{cosec} 30°=\sec 60°$, $\sec 30°=\operatorname{cosec} 60°$.]

(3) 45° কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

(5নং চিত্রে) মনে কর, $\angle AOB=45°$; CB-র P বিন্দু হইতে $PM\perp AO$ টানা হইল। সুতরাং $\angle OMP=90°$, $\therefore$ অবশিষ্ট $\angle OPM=45°=\angle AOB$.

$\therefore$ $OM=PM$. আবার, $OP^2=OM^2+PM^2=2PM^2=2MO^2$.

$\therefore$ $PM^2=\frac{1}{2}OP^2$, $\therefore$ $PM=\frac{1}{\sqrt{2}}OP$ এবং $OM=\frac{1}{\sqrt{2}}OP$.

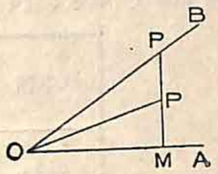
$\therefore$ $\sin 45°=\frac{PM}{OP}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}OP}{OP}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; সুতরাং $\operatorname{cosec} 45°=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$,

$\cos 45°=\frac{OM}{OP}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}OP}{OP}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; সুতরাং $\sec 45°=\sqrt{2}$.

$\tan 45°=\frac{PM}{OM}=\frac{OM}{OM}=1$; সুতরাং $\cot 45°=1$.

(4) 0° কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

মনে কর, ∠AOB একটি সূক্ষ্মকোণ এবং OB-স্থিত P বিন্দু হইতে PM⊥OA. এখন দেখ, ∠AOB ক্রমশঃ যত ছোট হইবে, PM লম্ব এবং অতিভুজ OP ক্রমশঃ তত ছোট হইবে। এইরূপে ∠AOB=0° হইলে, OP ও OM মিশিয়া গিয়া PM=0 এবং OP=OM হইবে।



চিত্র নং 8

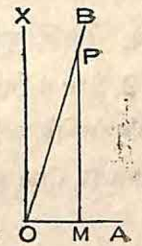
$$\therefore \quad \sin 0° = \frac{PM}{OM} = \frac{0}{OP} = 0. \cos 0° = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{OM} = 1,$$

$$\tan 0° = \frac{PM}{OM} = \frac{0}{OM} = 0.$$

$$\sec 0° = \frac{OP}{OM} = \frac{OM}{OM} = 1.$$

(5) 90° কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

মনে কর, ∠AOB একটি সূক্ষ্মকোণ এবং OB-স্থিত P বিন্দু হইতে PM⊥OA. এখন এই কোণটি ক্রমশঃ যতই বড় হইবে, OM ক্রমশঃ ততই ছোট এবং PM ক্রমশঃ OP-র নিকটতর হইতে থাকিবে। এইভাবে ∠AOB=90° হইলে, তখন OB⊥OA হইবে এবং PM ও OP মিশিয়া OM=0 এবং PM=OP হইবে।



চিত্র নং 9

$$\therefore \quad \sin 90° = \frac{PM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1, \cos 90° = \frac{OM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0;$$

$$\cot 90° = \frac{OM}{PM} = \frac{0}{OP} = 0.$$

$$\text{cosec } 90° = \frac{OP}{PM} = \frac{PM}{PM} = 1.$$

tan 90° ও sec 90° সম্বন্ধে উপরের মন্তব্য দেখ।

[দ্রষ্টব্য : উপরে cot 0°, cosec 0°, tan 90° ও sec 90° এইগুলির মান দেওয়া হয় নাই। কারণ, ঐগুলির মানের হর শূন্য (0) এবং কোন রাশিকে 0 দ্বারা ভাগ করা যায় না বলিয়া ঐ মানগুলি অনির্দিষ্ট (undefined) এবং সিলেবাস বহির্ভূত।]

18. 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণগুলির ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান মনে রাখিতে হইবে। নিম্নে তালিকা দেখ—

কোণ	0°	30°	45°	60°	90°
সাইন	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
কস	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
ট্যান	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অনির্দিষ্ট

[দ্রষ্টব্য : Sine ও cosine জানা থাকিলে অন্যান্য কোণানুপাতগুলি সহজেই নির্ণয় করা যায়। আবার দেখ, 0°, 30° ও 45° কোণের কেবল sine ও cos জানা থাকিলে, তাহা হইতে তালিকার অন্যান্য কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করা যায়। অতএব, ঐগুলি মুখস্থ রাখিবে। Sine-এর মান মনে রাখিবার কৌশল আছে। 0, 1, 2, 3 ও 4 লিখিয়া প্রত্যেকটিকে 4 দিয়া ভাগ করিয়া তারপর বর্গমূল নির্ণয় কর। এই বর্গমূলগুলিই অর্থাৎ $\sqrt{\frac{0}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{2}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{4}{4}}$ যথাক্রমে 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণের sine হইবে।]

বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদা. 1. দেখাও যে, $\sin^2 30° + \sin^2 45° + \cos^2 60° = 1.$

বামপক্ষ $= (\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $\cos 60° = 1 - 2\sin^2 30°.$ [E.B.S.B. '49]

$\cos 60° = \frac{1}{2}$;

আবার, $1 - 2\sin^2 30° = 1 - 2 \times (\frac{1}{2})^2 = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

$\therefore \cos 60° = 1 - 2\sin^2 30°.$

উদা. 3. $\tan^2 30° + 2\sin 60° + \tan 45° - \tan 60° + \cos^2 30°$ ইহার মান নির্ণয় কর। [G. U. '48]

প্রদত্ত রাশি $= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{3} + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + 1 + \frac{3}{4} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}.$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}$

$$=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}.$$

এখানে কোণগুলির বৃত্তীয় মান দেওয়া আছে। π রেডিয়ান$=180°$,

$\therefore$ বামপক্ষ$=\sin 60°\cos 30°+\sin 30°\tan 45°$.

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}=1\tfrac{1}{4},$$

এবং ডানপক্ষ$=\sin 30°\cos 60°+\sin 90°$

$$=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}+1=\tfrac{1}{4}+1=1\tfrac{1}{4}.$$ $\therefore$ উভয়পক্ষ সমান।

উদা. 5. সরল কর :

$$\frac{2\tan^2 30°}{1-\tan^2 30°}+(\sec^2 45°-\cot^2 45°)-(\sin^2 30°+\sin^2 60°).$$

[G. U. '50]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\{(\sqrt{2})^2-(1)^2\}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\{2-1\}-\{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}+1-1=\frac{2\times 3}{3\times 2}=1.$$

Exercise 4

প্রমাণ কর :

1. $\cos 60°=\frac{1}{2}$ এবং $\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$. [C. U. '41]
2. $\tan 60°=\sqrt{3}$ এবং $\operatorname{cosec} 30°=2$. [C. U. '43, '45]
3. $\cot 30°=\sqrt{3}$ এবং $\sin 90°=1$. [C. U. '44]
4. $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 5. $\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$. [G. U. '51]
6. $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}=\sqrt{3}$. [C. U. '40]
7. $\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{1-\cos 30°}}=\sec 60°+\tan 60°$. [C. U. '42]

সাংখ্যমান নির্ণয় কর :

8. $\sin^3 30^\circ+4 \cot^2 45^\circ-\sec^2 60^\circ$. [C. U. '50]

9. $3 \tan^2 45^\circ-\sin^2 60^\circ-\frac{1}{2}\cot^2 30^\circ+\frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$. [C. U. '51]

10. $\cos 60^\circ$, $\sec 30^\circ$ এবং $\cot 60^\circ$. [C. U '47]

11. $4 \sin^2 45^\circ+\tan^2 60^\circ+\operatorname{cosec}^2 30^\circ$. [C. U. '40]

12. $\cot^2 \frac{\pi}{4}+\sin^3 \frac{\pi}{6}-\cos^3 \frac{\pi}{3}$.

13. $4 \sin^2 30^\circ+2 \cos^2 45^\circ-3 \cos^2 60^\circ$.

14. সরল কর : $\dfrac{\sec^2 45^\circ-\cot^2 45^\circ}{\sin^2 60^\circ+\cos^2 30^\circ}+\dfrac{\sin^2 90^\circ-\cos^2 60^\circ}{\frac{1}{4}\tan^2 30^\circ}$.

প্রমাণ কর :—

15. $\tan 30^\circ . \sin 60^\circ+\tan 60^\circ . \cos 30^\circ=2$.

16. $\sin \frac{\pi}{3} . \tan \frac{\pi}{2}+\sin \frac{\pi}{2} . \cos \frac{\pi}{3}=2 \sin^2 \frac{\pi}{4}$.

17. $\sqrt{\dfrac{1+\sin 30^\circ}{1-\sin 30^\circ}}=\sec 60^\circ \sin 60^\circ$.

18. $\dfrac{1+2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ+\cos 60^\circ}+\dfrac{1-2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ-\cos 60^\circ}=2 \cos 30^\circ$.

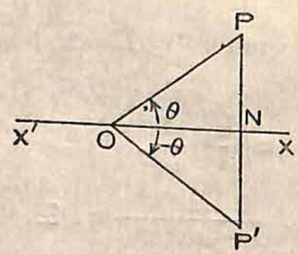
19. $\cot^2 30^\circ-2 \cos^2 60^\circ-\frac{3}{4} \sec^2 45^\circ-4 \sin^2 30^\circ$ ইহার মান নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '52]

20. $\dfrac{\tan 60^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \tan 30^\circ}+\cos 60^\circ \cos 30^\circ+\sin 60^\circ \sin 30^\circ$ ইহার মান নির্ণয় কর। [W. B, S. F. '53]

---

19. ঋণাত্মক কোণ :

XOX' একটি রেখা। OP সরলরেখা যদি OXএর উপর হইতে Oকে কেন্দ্র করিয়া ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘোরে (anti-clockwise), তবে OXএর সহিত OP যে-কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে ধনাত্মক কোণ বলে এবং যদি OP সরলরেখা ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেই দিকে ঘোরে (clockwise) তবে উহা যে-কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে ঋণাত্মক কোণ বলে। চিত্রে ∠POX ধনাত্মক এবং ∠P'OX ঋণাত্মক।



চিত্র নং 10

এখানে কোণ দুইটি পরিমাণে সমান, কিন্তু একটি ধনাত্মক (θ), অন্যটি ঋণাত্মক ($-\theta$).

20. ঋণাত্মক কোণের কোণানুপাত নির্ণয় :

মনে করা যাক, $\angle XOP = \theta$ এবং $\angle XOP' = -\theta$.

OP রেখার যে কোন বিন্দু P হইতে OXএর উপর PN লম্ব টানা হইল (পূর্ব-পৃষ্ঠার চিত্র দেখ)। ইহাকে বর্ধিত করিলে OP′ রেখার P′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

OPN এবং OP′N ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle PON = \angle P'ON$.

$\angle PNO = \angle P'NO$ (কারণ, প্রত্যেকে 1 সমকোণ) এবং ON সাধারণ বাহু, $\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $OP = OP'$ এবং $PN = P'N$. OP রেখাই ঘুরিয়া OP′ হইয়াছে বলিয়া OP′ রেখা ধনাত্মক। কিন্তু P′N রেখা ঋণাত্মক যেহেতু ইহা OX এর নীচের দিকে অবস্থিত।

এখন $\sin(-\theta) = \frac{P'N}{OP'} = \frac{-PN}{OP} = -\frac{PN}{OP} = -\sin\theta \cdots\cdots(1)$

$$\cos(-\theta) = \frac{ON}{OP'} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta \cdots\cdots(2)$$

$$\therefore \tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \cdots(3)$$

$\therefore$ (1) হইতে পাই $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$,

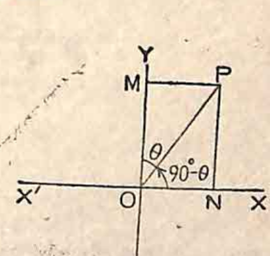
(2) " " $\sec(-\theta) = \sec\theta$,

এবং (3) " " $\cot(-\theta) = -\cot\theta$.

পূরক কোণের কোণানুপাত

21. $(90° - \theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে করা যাক, XOX′ এবং YOY′ দুইটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে লম্ব এবং $\angle XOP = 90° - \theta$; সুতরাং $\angle POY = \theta$ হইবে। P বিন্দু হইতে OX এবং OYএর উপর যথাক্রমে PN এবং PM লম্ব টানা হইল।



চিত্র নং 11

$\therefore$ $PN = OM$ এবং $ON = PM$.

এখন, $\sin(90° - \theta) = \frac{PN}{OP} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta \cdots\cdots(1)$

এবং $\cos(90^\circ-\theta)=\frac{ON}{OP}=\frac{PM}{OP}=\sin\theta \cdots\cdots(2)$

$\therefore \quad \tan(90^\circ-\theta)=\frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta \cdots\cdots (3)$

$\therefore$ (1) হইতে $\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta.$

(2) হইতে $\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta.$

(3) হইতে $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta.$

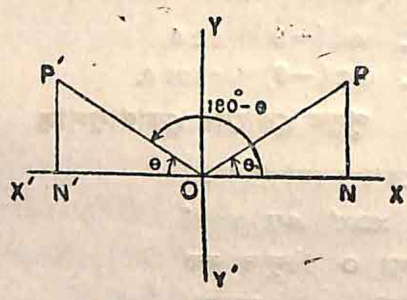
আবার, $\because$ $\angle MON$ সমকোণ,

$\therefore$ $\angle PON$ ও $\angle POM$ পরস্পর পূরক কোণ।

অতএব, এখানে দুইটি পূরক কোণের কোণানুপাতগুলির পরস্পর সম্বন্ধ পাওয়া গেল।

22. $(180^\circ-\theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, OX হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া OP প্রথমে $\angle XOP\ (=\theta)$ উৎপন্ন করিল। তারপর আরও ঘুরিয়া উহা দুই সমকোণ (180°) উৎপন্ন করিয়া OX′-এর উপর সমাপতিত হইল। তৎপরে OP যদি P কোণের সমান বিপরীত দিকে ঘুরিয়া PO′-এর স্থানে আসে (অর্থাৎ $\angle P'ON'=-\theta$ হয়), তবে $\angle XOP'=180^\circ-\theta$ পাইব।



চিত্র নং 12

এক্ষণে, PN এবং P′N′ যথাক্রমে OX এবং OX′-এর উপর লম্ব ;

$\therefore$ $\triangle PON$ ও $\angle P'ON'$ সর্বসম, $\therefore$ $PN=P'N'$ এবং $ON=ON'$.

এখন $\sin(180^\circ-\theta)=\sin XOP'=\frac{P'N'}{OP'}=\frac{PN}{OP}=\sin\theta,$

$\cos(180^\circ-\theta)=\cos XOP'=\frac{ON'}{OP'}=\frac{-ON}{OP}=-\cos\theta\,;$

$\therefore\ \tan(180^\circ-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$

$\therefore\ \text{cosec}(180^\circ-\theta)=\text{cosec}\,\theta,\ \sec(180^\circ-\theta)=-\sec\theta$

এবং $\cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta.$

[দ্রষ্টব্য : এখানে দুইটি পরস্পর সম্পূরক (supplementary) কোণের কোণানুপাতগুলির পরস্পর সম্বন্ধ পাওয়া গেল।]

23. কতিপয় উদাহরণ :

উদা. 1. $\sin 150^\circ$, $\cos 135^\circ$ এবং $\sin(-120^\circ)$-র মান নির্ণয় কর।

$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$

$\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\sin(-120^\circ)=-\sin 120^\circ=-\sin(180^\circ-60^\circ)$

$=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

উদা. 2. $\cos 150^\circ.\sin 135^\circ-\sin 120^\circ.\cos 135^\circ$এর মান নির্ণয় কর।

$\cos 150^\circ.\sin 135^\circ-\sin 120^\circ.\cos 135^\circ$

$=\cos(180^\circ-30^\circ)\sin(180^\circ-45^\circ)-\sin(180^\circ-60^\circ)\cos(180^\circ-45^\circ)$

$=-\cos 30^\circ\sin 45^\circ-\sin 60^\circ(-\cos 45^\circ)$

$=-\cos 30^\circ\sin 45^\circ+\sin 60^\circ\cos 45^\circ$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$

উদা. 3. সমাধান কর : $2\cos^2\theta=3\sin\theta\ (0^\circ<\theta<180^\circ).$

$2\cos^2\theta=3\sin\theta,\quad \therefore\ 2(1-\sin^2\theta)=3\sin\theta,$

বা, $2\sin^2\theta+3\sin\theta-2=0$

বা, $2\sin^2\theta+4\sin\theta-\sin\theta-2=0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta+2)-1(\sin\theta+2)=0$

বা, $(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)=0$, কিন্তু $\sin\theta+2\neq 0,$

$\therefore\ 2\sin\theta-1=0$, বা, $\sin\theta=\frac{1}{2}.$

$\therefore\ \theta=30^\circ$, বা, $(180^\circ-30^\circ)$ অর্থাৎ $150^\circ.$

$\therefore\ \theta=30^\circ$ বা, $150^\circ.$

[দ্রষ্টব্য : এখানে θ কোণটি 0° অপেক্ষা বৃহত্তর ও 180° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হওয়ায় $\sin\theta+2=0$ হইতে পারে না।]

উদা. 4. $2\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0$ হইলে θ-র মান কত ?

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$2(1-\cos^2\theta)+\sqrt{3}\cos\theta+1=0,$

বা, $2-2\cos^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0,$

বা, $2\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta-3=0,$

বা, $2\cos^2\theta-2.\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{3}\cos\theta-3=0,$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta-\sqrt{3})+\sqrt{3}(\cos\theta-\sqrt{3})=0,$

বা, $(\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta+\sqrt{3})=0,$

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{3},$ অথবা $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

কিন্তু কোন কোণের কোসাইন 1 অপেক্ষা বেশী হইতে পারে না বলিয়া এখানে $\cos\theta=\sqrt{3}$ ধরা যাইবে না।

$\therefore\ \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},$ বা, $-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

বা, $\cos(180°-\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$ $[\because\ -\cos\theta=\cos(180°-\theta)]$

$=\cos 30°,$

$\therefore\ 180°-\theta=30°,\quad \therefore\ \theta=180°-30°=150°.$

উদা. 5. কোন ত্রিভুজের কোণত্রয়ের পরিমাণ α, β, θ ডিগ্রি হইলে প্রমাণ কর যে, $\cos(\alpha+\beta)+\sin\theta=\sin(\alpha+\beta)-\cos\theta.$

$\because\ \alpha+\beta+\theta=180°,$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\cos(180°-\theta)+\sin\theta=-\cos\theta+\sin\theta.$

$=\sin\theta-\cos\theta\ ;$

ডানপক্ষ $=\sin(180°-\theta)-\cos\theta=\sin\theta-\cos\theta,$

অতএব, প্রদত্ত উভয়পক্ষই সমান।

Exercise 5

1. মান নির্ণয় কর : $\sin(-150°)$ এবং $\cos(-150°)$.
2. প্রমাণ কর যে, $\cos 120°\sin(-30°)-\sin 120°\cos 150°=1.$
3. $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ হইলে, $\cos\theta+\sin\theta$ এবং $\tan\theta-\cot\theta$-র মান নির্ণয় কর।

4. θ-র মান $0°$ হইতে $180°$-র মধ্যে কত হইলে $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ হইবে ?

5. নিম্নের সমীকরণগুলিতে $0°<\theta<180°$; সমীকরণগুলির সমাধান কর :—

(i) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2.$ [C. U. 1936]

(ii) $2\sin^2\theta+3\cos\theta=0.$ (iii) $3\{\sec^2(\pi-\theta)+\tan^2\theta\}=5.$

6. ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ কর যে, $\tan(B+C)+\tan(C+A)=\tan(\pi-A)-\tan B.$

---

24. অপনয়ন (Elimination) :

উদা. 1. $x=a\sin A$, $y=b\cos A$, এই সমীকরণ দুইটি হইতে A-এর অপনয়ন কর।

$\because\ x=a\sin A,\quad \therefore\ \frac{x}{a}=\sin A$;

এবং $\because\ y=b\cos A,\quad \therefore\ \frac{y}{b}=\cos A.$

এক্ষণে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2A+\cos^2A=1.\quad \therefore\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$

ইহাই x-বর্জিত সমীকরণ।

উদা. 2. $x=a\sin B$, $y=\frac{a}{\sec B}$ হইতে Bকে অপসৃত কর।

$\because\ x=a\sin B,\quad \therefore\ \frac{x}{a}=\sin B.$

আবার, $\because\ y=\frac{a}{\sec B},\quad \therefore\ \frac{y}{a}=\frac{1}{\sec B}=\cos B.$

এক্ষণে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\sin^2B+\cos^2B=1,$

$\therefore\ x^2+y^2=a^2$, ইহাই অপনীতক।

উদা. 3. $x=a\sec\theta$, $y=b\tan\theta$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

[G. U. '51]

$\because\ x=a\sec\theta,\quad \therefore\ \frac{x}{a}=\sec\theta\quad \therefore\ \frac{x^2}{a^2}=\sec^2\theta,$

$\because\ y=b\tan\theta,\quad \therefore\ \frac{y}{b}=\tan\theta\quad \therefore\ \frac{y^2}{b^2}=\tan^2\theta$;

এক্ষণে, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\sec^2\theta-\tan^2\theta=1+\tan^2\theta-\tan^2\theta=1.$

$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

উদা. 4. যদি $\tan A+\sin A=m$, এবং $\tan A-\sin A=n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$. [H. S. '64 ; C. U. '14]

এখানে, $m+n=\tan A+\sin A+\tan A-\sin A=2\tan A$,

এবং $m-n=2\sin A$.

আবার, $mn=(\tan A+\sin A)(\tan A-\sin A)=(\tan^2 A-\sin^2 A)$

$=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}-\sin^2 A=\sin^2 A\left(\frac{1}{\cos^2 A}-1\right)=\sin^2 A\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A}\right)$

$=\sin^2 A\times\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\sin^2 A\tan^2 A. \quad \therefore \quad \sqrt{mn}=\sin A\tan A.$

এক্ষণে, $m^2-n^2=(m+n)(m-n)=2\tan A\times 2\sin A$.

$=4\tan A\sin A=4\sqrt{mn}.$

Exercise 6

θ-র অপনয়ন কর :

1. $x=a\sin\theta$ এবং $y=b\cos\theta$.
2. $x=b\cos\theta,\quad y=b\sin\theta$.
3. $x=a(\sec\theta+\tan\theta)$, $y=a(\sec\theta-\tan\theta)$.
4. $a=b(\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta)$, $c=b(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)$.
5. $x=a\tan\theta$, $y=b\cot\theta$.

প্রমাণ কর :

6. $\sin A=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$ হইলে, $n\cos A=m\sin A$ হইবে।
7. যদি $\cos\theta=p$ এবং $\cot\theta=q$ হয়, তবে $\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}=1$ হইবে।
8. $\cos\theta=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ হইলে, $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\frac{p}{q}$ হইবে।
9. যদি $\sin\theta=\frac{2mn}{m^2+n^2}$ হয়, তবে $\sec\theta+\tan\theta=\frac{m+n}{m-n}$.

25. বিবিধ সমীকরণের সমাধান :

উদা. 1. সমাধান কর : $2\cos\theta=\sec\theta$.

$2\cos\theta=\sec\theta$, বা, $2\cos\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, বা, $2\cos^2\theta=1$,

বা, $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$, বা, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; কিন্তু $\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\therefore\ \cos\theta=\cos 45^\circ$, $\therefore\ \theta=45^\circ$.

উদা. 2. যদি $2\sin^2\theta=3\cos\theta$ এবং θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে θ কত ডিগ্রি হইবে ? [C. U. '50]

$2\sin^2\theta=3\cos\theta$, বা, $2(1-\cos^2\theta)=3\cos\theta$,

বা, $2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$,

বা, $2\cos^2\theta+4\cos\theta-\cos\theta-2=0$,

বা, $(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$, $\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}$, বা, -2.

$\cos\theta$-র মান -1 অপেক্ষা ছোট বা $+1$ অপেক্ষা বড় হইতে পারে না বলিয়া $\cos\theta=-2$ হইতে পারে না।

$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$, $\therefore\ \theta=60^\circ$.

উদা. 3. সমাধান কর : $\cos 12A=\sin 6A$.

কোন কোণের sine তাহার অনুপূরক কোণের cosine-এর সমান হয়।

$\therefore\ \cos 12A=\sin 6A=\cos(90^\circ-6A)$.

$\therefore\ 12A=90^\circ-6A$, বা, $18A=90^\circ$, $\therefore\ A=5^\circ$.

উদা. 4. যদি $r\cos\theta=2\sqrt{3}$, $r\sin\theta=2$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে θ ও r-এর মান কত ? [C. U. '45 ; G. U. '49]

$\because\ r\cos\theta=2\sqrt{3}\cdots(1)$ এবং $r\sin\theta=2\cdots(2)$

$\therefore$ (1)÷(2) করিয়া পাই $\dfrac{r\cos\theta}{r\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$, বা, $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\sqrt{3}$,

বা, $\cot\theta=\sqrt{3}=\cot 30^0$, $\therefore\ \theta=30^0$.

এক্ষণে (1) হইতে পাই, $r\cos 30^0=2\sqrt{3}$, বা, $r.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

$\therefore\ r=\dfrac{2\sqrt{3}\times 2}{\sqrt{3}}=4$. অতএব, $r=4$ এবং $\theta=30^0$.

[G. U. '52-র এই প্রশ্নেই $r\cos\theta=2$, $r\sin\theta=2\sqrt{3}$ ছিল।]

[উত্তর $r=4$, $\theta=60^\circ$.]

উদা. 5. $1+\sin^2 A=3\sin A\cos A$ হইলে, tan A-র মান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, sin A-র একটি মান $\frac{1}{\sqrt{2}}$ হইবে। [C.U. '50]

$1+\sin^2 A=3\sin A\cos A.$

বা, $\cos^2 A+\sin^2 A+\sin^2 A=3\sin A\cos A.$

বা, $\cos^2 A-3\sin A\cos A+2\sin^2 A=0,$

বা, $\cos^2 A-2\sin A\cos A-\sin A\cos A+2\sin^2 A=0,$

বা, $(\cos A-2\sin A)(\cos A-\sin A)=0,$

$\therefore$ $\cos A-2\sin A=0\cdots(1)$ অথবা, $\cos A-\sin A=0\cdots(2).$

এক্ষণে (1) হইতে পাই, $\cos A=2\sin A,$

বা, $\frac{1}{2}=\frac{\sin A}{\cos A}$ (উভয় পক্ষকে 2 cos A দ্বারা ভাগ করিয়া),

$\therefore$ $\tan A=\frac{1}{2}.$

(2) হইতে পাই $\cos A=\sin A$, বা, $1=\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A.$

$\therefore$ $\tan A=1$, বা, $\frac{1}{2}$.

আবার, * $\because$ $\cos A=\sin A$, $\therefore$ $A=45^\circ$ [কারণ, 45° কোণেরই সাইন ও কস সমান হয়] $\therefore$ $\sin A=\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

[* অন্য প্রণালী : $\sin A=\cos A=\sin(90^\circ-A).$

$\therefore$ $A=90^\circ-A$, বা, $2A=90^\circ$ $\therefore$ $A=45^\circ.$

$\therefore$ $\sin A=\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}.$]

Exercise 7

নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1 $3\tan\theta=\cot\theta.$

2. $4\cos A=\sec A.$

3. $\tan A+\cot A=\frac{4}{\sqrt{3}}.$

4. $\sin A+\cos A=1.$

5. $\sec\theta+\cos\theta=\frac{5}{2}.$

6. $2\sin\theta=\operatorname{cosec}\theta.$

7. $\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta=\frac{3}{\sqrt{2}}.$

8. $\cot 5\theta=\tan 10\theta.$

9. $\sin 10\theta=\cos 8\theta.$

10. যদি $\tan A+\cot A-2=0$ হয়, তবে sin A কত ?

11. $x \tan\theta = \sqrt{3}$ এবং $x \cot\theta = 3\sqrt{3}$, এবং θ সূক্ষ্মকোণ ; θ ও x-এর মান নির্ণয় কর।

12. যদি $p \sin\theta = \sqrt{3}$, $p \cos\theta = 1$, এবং θ সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে θ ও p-এর মান কত ?

13. যদি $x \sin 30^\circ \tan 60^\circ \cos 30^0 = \sin^2 60^0 - \sec^2 45^0$ হয়, তবে x-এর মান কত হইবে ?

14. যদি $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$, এবং θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cot\theta = \sqrt{3}$. [C. U. '51]

15. সমাধান কর : $\dfrac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

16. সমাধান কর : $\tan\theta + \cot\theta = 2\sec\theta$ $(0^0 < \theta < 180^0)$.

17. xএর মান কত হইলে $\tan^2 45^0 - \cos^2 60^0$
$= x \sin 45^0 \cos 45^0 \tan 60^0$ হইবে ? [C. U. '49]

ত্রিকোণমিতির ব্যবহারিক প্রয়োগ

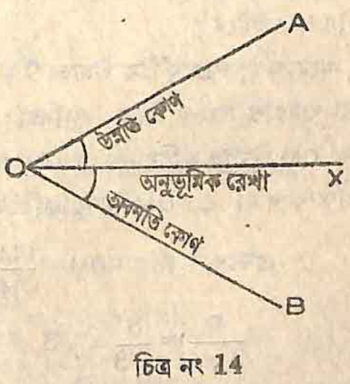
উচ্চতা ও দূরত্ব (Height and distance)

দুর্গম গিরিশৃঙ্গের উচ্চতা, দুস্তর বিশাল নদীর বিস্তার এবং চন্দ্র, সূর্য, নক্ষত্রাদির দূরত্ব প্রভৃতি নির্ণয় এই ত্রিকোণমিতির প্রয়োগ ও সাহায্যেই হইয়া থাকে।

26. উন্নতি কোণ (Angle of elevation) এবং অবনতি কোণ (Angle of depression) :

ভূমিতলের সমান্তরাল সরলরেখাকে অনুভূমিক (horizontal) সরলরেখা এবং উহার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখাকে লম্বরেখা (vertical line) বলে।

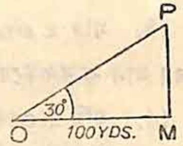
মনে কর, OX একটি অনুভূমিক সরলরেখা এবং ঐ রেখার উপরের দিকে A বিন্দু এবং নীচের দিকে B বিন্দু অবস্থিত। যদি কোন ব্যক্তি O বিন্দুতে তাহার চক্ষু নিবদ্ধ রাখিয়া A ও B বিন্দুর প্রতি দৃষ্টিপাত করে, তবে XOA কোণটিকে A বিন্দুর **উন্নতি-কোণ** বা কৌণিক উন্নতি এবং XOB কোণটিকে B বিন্দুর **অবনতি কোণ** বা কৌণিক অবনতি বলে।



চিত্র নং 14

এখানে মনে রাখিবে যে, পর্যবেক্ষকের চক্ষুর অবস্থানবিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত বা কল্পিত অনুভূমিক রেখার উপর দিকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে উক্ত বিন্দুর কৌণিক উন্নতি বলে এবং ঐ রেখার নীচের দিকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে উক্ত বিন্দুর কৌণিক অবনতি বলে।

উদা. 1. মনে কর, PM একটি পাহাড় এবং উহার তলদেশ হইতে 100 গজ দূরে O বিন্দুতে ঐ পাহাড়ের চূড়া P বিন্দুর উন্নতিকোণ 30^0 ; ঐ পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র নং 15

এখানে PM উচ্চতা, OM = 100 গজ এবং $\angle MOP = 30^0$, অর্থাৎ POM সমকোণী ত্রিভুজটির ভূমি দেওয়া আছে, লম্ব নির্ণয় করিতে হইবে। অতএব লম্ব ও ভূমির অনুপাত হইতে উহা নির্ণয় করা যাইবে।

$$\frac{PM}{OM} = \tan POM = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \therefore \quad \frac{PM}{100} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore \quad PM = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ গজ} = \frac{100 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \text{ গজ} = \frac{100\sqrt{3}}{3} \text{ গজ} = 57{\cdot}7 \text{ গজ}।$$

উদা. 2. কোন নদীতীরস্থ একটি বৃক্ষের উচ্চতা 50 মিটার। বিপরীত তীরস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃক্ষশীর্ষের উন্নতিকোণ 30^0 হইলে, নদীটির বিস্তার কত?

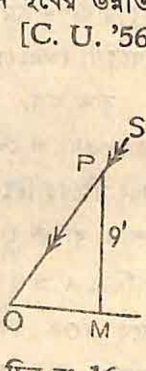
(চিত্র নং 15 আঁক)। মনে কর, নদীর এক তীরে অবস্থিত PM বৃক্ষটি 50 মি. উচ্চ এবং উহার অপর তীরে বিপরীত দিকে অবস্থিত O বিন্দু হইতে P-এর উন্নতি-কোণ $POM = 30^0$. নদীর বিস্তার OM নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে $\frac{PM}{OM} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{50}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\therefore \quad OM = 50\sqrt{3}$.

$\therefore$ নদীর বিস্তার $= 50\sqrt{3}$ মি. $= 86{\cdot}6$ মিটার।

উদা. 3. 9 ফুট উচ্চ খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য $3\sqrt{3}$ ফুট হইলে তখন সূর্যের উন্নতি-কোণ কত হইবে? [C. U. '56]

মনে কর, PM খুঁটির উচ্চতা 9 ফুট, S সূর্যের অবস্থান এবং সূর্যরশ্মি PO-র দিকে আসিয়া ভূমির উপর PM-এর ছায়া OM উৎপন্ন করিয়াছে। $OM = 3\sqrt{3}$ ফুট। সূর্যের উন্নতিকোণ বা $\angle POM$ নির্ণয় করিতে হইবে।



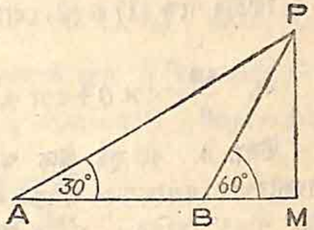
চিত্র নং 16

এক্ষণে, $\tan POM = \frac{PM}{OM}$

$$= \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

কিন্তু $\tan 60^0 = \sqrt{3}$ হয়। $\therefore \quad \angle POM = 60^0$.

উদা. 4. কোন লম্ব চিমনি উহার অনুভূমিক সরলরেখায় অবস্থিত A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 30° ও 60° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিয়াছে। AB=100 ফুট হইলে চিমনির উচ্চতা কত? [C. U. '40]



চিত্র নং 17

মনে কর, চিমনির উচ্চতা PM, $\angle PAM=30°$, $\angle PBM=60°$ এবং AB=100 ফুট।

এবং $\frac{AM}{PM}=\cot 30°=\sqrt{3}$........(1)

এক্ষণে, $\frac{BM}{PM}=\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.......(2)

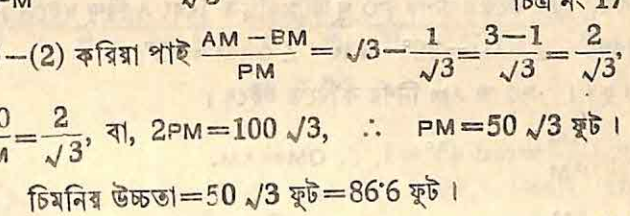
$\therefore$ (1)–(2) করিয়া পাই $\frac{AM-BM}{PM}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3-1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

বা, $\frac{100}{PM}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, বা, $2PM=100\sqrt{3}$, $\therefore$ $PM=50\sqrt{3}$ ফুট।

$\therefore$ চিমনির উচ্চতা $=50\sqrt{3}$ ফুট $=86{\cdot}6$ ফুট।

উদা. 5. একই অনুভূমিক সরলরেখায় অবস্থিত দুইটি বিন্দু হইতে কোন স্তম্ভশীর্ষের উন্নতিকোণ যথাক্রমে θ ও ϕ, এবং স্তম্ভের উচ্চতা h হইলে, ঐ বিন্দু দুইটির মধ্যে দূরত্ব কত? [C. U. '42]

যে বিন্দুদ্বয় হইতে স্তম্ভশীর্ষের উন্নতিকোণ দেখা যাইতেছে তাহারা স্তম্ভের একই পার্শ্বে অথবা পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত থাকিতে পারে। মনে কর, PM স্তম্ভের



চিত্র নং 18

উচ্চতা h এবং প্রথম চিত্রে উহার একই পার্শ্বস্থিত ও দ্বিতীয় চিত্রে উহার দুই পার্শ্বস্থিত A ও B বিন্দু হইতে Pএর উন্নতিকোণ যথাক্রমে θ ও ϕ.

AB দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

উভয় চিত্রে $\frac{AM}{PM}=\cot\theta$...(1), এবং $\frac{BM}{PM}=\cot\phi$...(2).

প্রথম পক্ষে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $\frac{AM-BM}{PM}=\cot\theta-\cot\phi$.

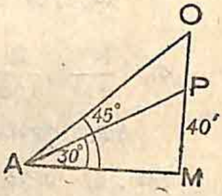
বা, $\frac{AB}{h}=\cot\theta-\cot\phi$, $\therefore$ $AB=h(\cot\theta-\cot\phi)$. (উত্তর)।

দ্বিতীয় পক্ষে (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই, $\frac{AM+BM}{PM}=\cot\theta+\cot\phi$,

বা, $\frac{AB}{h}=\cot\theta+\cot\phi$, $\therefore$ $AB=h(\cot\theta+\cot\phi)$. (উত্তর)।

উদা. 6. 40 ফুট উচ্চ স্তম্ভের উপর একটি খুঁটি আছে। স্তম্ভের অনুভূমিক সরলরেখায় দণ্ডায়মান ব্যক্তি ঐ স্তম্ভের ও খুঁটির শীর্ষদ্বয়ের উন্নতিকোণ যথাক্রমে 30° ও 45° দেখিল। খুঁটির দৈর্ঘ্য এবং স্তম্ভ হইতে লোকটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

মনে কর, PM স্তম্ভের উপর PO খুঁটি অবস্থিত এবং A বিন্দু হইতে P ও O বিন্দুর উন্নতিকোণদ্বয় $\angle PAM=30°$ এবং $\angle OAM=45°$, PM = 40 ফুট। PO ও AM নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র নং 19

এক্ষণে, $\frac{OM}{PM}=\tan 45°=1$, $\therefore$ $OM=AM$.

আবার, $\frac{PM}{AM}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{40}{AM}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\therefore$ $AM=40\sqrt{3}$. $\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=40\sqrt{3}$ ফুট।

$\therefore$ খুঁটির দৈর্ঘ্য $PO=OM-PM=AM-PM=40\sqrt{3}-40$
$=40(\sqrt{3}-1)=40(1{\cdot}732-1)=29{\cdot}28$ ফুট।

উদা. 7. কোন নদীতীরে দণ্ডায়মান এক ব্যক্তি দেখিল ঠিক বিপরীত তীরে অবস্থিত একটি স্তম্ভ 60° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিয়াছে; কিন্তু সে ঐ স্থান হইতে 60 মিটার পিছাইয়া দেখিল সম্মুখকোণ 30° হইল। স্তম্ভের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার কত?

[চিত্র নং 17 আঁক] চিত্রে স্তম্ভের উচ্চতা PM ও নদীর প্রস্থ BM, অতএব $\angle PBM=60°$; লোকটি B বিন্দু হইতে সরিয়া 60 মি. পিছনে A বিন্দু হইতে দেখিল $\angle PAM=30°$.

এক্ষণে, $\frac{AM}{PM}=\cot 30°=\sqrt{3}$, এবং $\frac{BM}{PM}=\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $\frac{AM-BM}{PM}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{60}{PM}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

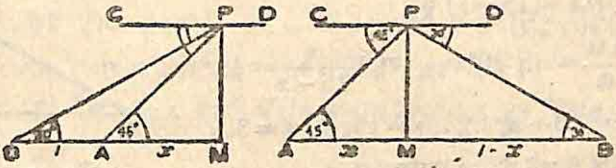
$\therefore$ $PM=30\sqrt{3}$. $\therefore$ স্তম্ভের উচ্চতা $=30\sqrt{3}$ মি. $=30\times 1{\cdot}732$ মি.
$=51{\cdot}96$ মিটার।

আবার, $\frac{BM}{PM}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\therefore$ $BM=\frac{1}{\sqrt{3}}\times PM=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 30\sqrt{3}=30$.

অতএব, নদীর বিস্তার = 30 মিটার।

উদা. 8. কোন ঋজু পথ হইতে লম্বভাবে উচ্চে অবস্থিত কোন এরোপ্লেন হইতে ঐ পথের উপর পরপর দুইটি মাইল-ফলকের অবনতি কোণ $45°$ ও $30°$ দেখা গেল। পথ হইতে প্লেনটির উচ্চতা কত? [C. U. '41 ; G.U. '49]

মনে কর, উভয় চিত্রে A ও B দুইটি মাইল-পোস্ট এবং P বিন্দু এরোপ্লেনের অবস্থান, সুতরাং লম্ব PM উহার উচ্চতা। এখানে $\angle PAM=45°$, $\angle PBM=30°$,



চিত্র নং 20

এবং $AB=1$ মাইল। মনে কর, $AM=x$ মাইল, সুতরাং প্রথম চিত্রে $BM=(1+x)$ মাইল এবং দ্বিতীয় চিত্রে $BM=(1-x)$ মাইল।

এক্ষণে, $\frac{PM}{AM}=\tan 45°=1$, বা, $\frac{PM}{x}=1$, $\therefore$ $PM=x$.

প্রথম চিত্রে, $\frac{PM}{BM}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{x}{1+x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

বা, $x\sqrt{3}=1+x$, বা, $x\sqrt{3}-x=1$, বা, $x(\sqrt{3}-1)=1$,

$\therefore$ $x=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1\cdot37$ (আসন্ন)।

দ্বিতীয় চিত্রে, $\frac{PM}{BM}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

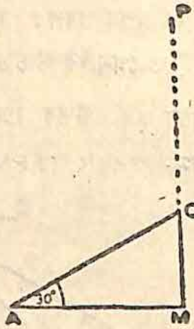
বা, $x\sqrt{3}=1-x$, বা, $x\sqrt{3}+x=1$, বা, $x(\sqrt{3}+1)=1$,

$\therefore$ $x=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\cdot37$ (আসন্ন)।

$\therefore$ এরোপ্লেনের উচ্চতা $=1\cdot37$ মাইল, বা $\cdot37$ মাইল।

উদা. 9. 15 ফুট উচ্চ একটি লম্ব খুঁটি একস্থানে ভাঙ্গিয়া গেল এবং উহার অবিচ্ছিন্ন উপরের অংশ ভূমিকে $30°$ কোণে স্পর্শ করিল। খুঁটিটি কত উঁচুতে ভাঙ্গিয়াছিল? [G. U. '51]

মনে কর, ভূমির উপর M বিন্দুতে অবস্থিত PM খুঁটিটি Q বিন্দুতে ভাঙ্গিয়াছে এবং উহার অগ্রভাগ অর্থাৎ P বিন্দু নত হইয়া A বিন্দুতে ভূমির উপর পড়িয়াছে, সুতরাং AQ হইল PQএর নূতন অবস্থান। অতএব, PQ=AQ এবং $\angle QAM=30^\circ$ হইল। মনে কর, $QM=x$ ফুট, সুতরাং $AQ=PQ=(15-x)$ ফুট।



চিত্র নং 21

এক্ষণে, $\frac{QM}{AQ}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, বা, $\frac{x}{15-x}=\frac{1}{2}$,

বা, $2x=15-x$, বা, $3x=15$, $\therefore x=5$.

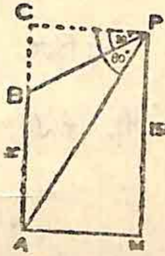
অতএব, খুঁটিটি 5 ফুট উপরে ভাঙ্গিয়াছে।

উদা. 10. 150 ফুট উচ্চ একটি পাহাড়ের চূড়া হইতে কোন স্তম্ভের শীর্ষ ও পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° ; স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, PM পাহাড়টি 150 ফুট এবং AB স্তম্ভটি x ফুট উচ্চ। PC ‖ MA টান হইল, সুতরাং $\angle CPB=30^\circ$ ও $\angle CPA=60^\circ$ হইল।

AB-র বর্ধিত অংশ যেন PCকে C বিন্দুতে ছেদ করিল,

সুতরাং $BC=AC-AB=PM-AB=150-x$.



চিত্র নং 22

$\therefore \angle PAM=\angle APC=60^\circ$,

$\therefore \frac{AM}{PM}=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\therefore AM=\frac{PM}{\sqrt{3}}=\frac{150}{\sqrt{3}}=\frac{150\sqrt{3}}{3}=50\sqrt{3}$.

আবার, $\frac{BC}{AM}=\frac{BC}{PC}=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

বা, $\frac{150-x}{50\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ [$\because AM=50\sqrt{3}$,] বা, $150-x=50$,

$\therefore x=100$. $\therefore$ স্তম্ভের উচ্চতা=100 ফুট।

Exercise 8

1. একটি খুঁটি 300 মিটার দূরে 30° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে। উহার উচ্চতা কত?

2. কোন মনুমেন্টের পাদমূল হইতে 150 মিটার দূরে উহার শীর্ষের উন্নতিকোণ 60° হইলে উহার উচ্চতা কত?

3. কোন চিমনির অনুভূমিক সমতলে কোন স্থান হইতে উহার শীর্ষের উন্নতি-কোণ 30° দেখা যায়। উহার উচ্চতা 60′ হইলে ঐ স্থানের দূরত্ব কত?

4. যখন সূর্যের উন্নতিকোণ 30°, তখন লম্বভাবে অবস্থিত 6 ফুট উচ্চ একটি যষ্টির অনুভূমিক সমতলের উপর ছায়ার দৈর্ঘ্য কত হইবে? [G. U. '50]

5. যখন সূর্যের উন্নতিকোণ 60°, তখন একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য $3\sqrt{3}$ মি.। খুঁটিটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

6. 30 ফুট দীর্ঘ একখানি মই একটি দেওয়ালের মাথায় পৌঁছিয়াছে ও ভূমির সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। দেওয়ালটির উচ্চতা কত?

7. যখন 24 মিটার উচ্চ একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য $24\sqrt{3}$ মিটার, তখন সূর্যের উন্নতিকোণ কত?

8. একটি চিমনির অনুভূমিক সরলরেখায় কোন স্থান হইতে উহার দিকে 50 ফুট অগ্রসর হওয়ায় উহার শীর্ষের উন্নতিকোণ 30° হইতে 45° হইল। চিমনির উচ্চতা কত? [C. U. '51]

9. একটি স্তম্ভচূড়ার উন্নতিকোণ 30° এবং উহার দিকে 20 ফুট অগ্রসর হইয়া উন্নতিকোণ 60° দেখা গেল। স্তম্ভটির উচ্চতা কত? [G. U. '48]

10. কোন নদীর তীরে 45 ফুট উচ্চ একটি বৃক্ষ আছে। উহার ঠিক বিপরীত তীরস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃক্ষশীর্ষের উন্নতিকোণ 60° হইলে নদীর প্রস্থ কত?

11. একটি মিনারের দিকে 60 ফুট অগ্রসর হওয়ায় উহার চূড়ার উন্নতিকোণ 45° হইতে 60°তে পরিণত হইল। মিনারের উচ্চতা নির্ণয় কর। [E. B. S. B. '48]

12. যখন সূর্যের উন্নতিকোণ 60° তখন সমতল ক্ষেত্রের উপর অবস্থিত কোন স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য অপেক্ষা সূর্যের উন্নতিকোণ 45° হইলে ঐ ছায়ার দৈর্ঘ্য 40 ফুট বেশী হয়। স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় কর। [C. U. '50, D. B. '51]

13. দুইটি স্তম্ভের মধ্যে অনুভূমিক দূরত্ব 60 মি. এবং দ্বিতীয়টি 200 মি. উচ্চ। উহার চূড়া হইতে দেখিলে প্রথম স্তম্ভের চূড়ার অবনতি কোণ 30° দেখা যায়। প্রথমটির উচ্চতা কত?

14. 120 ফুট উচ্চ কোন লম্ব খুঁটি কিছু উপরে ভাঙ্গিয়া গেল এবং উপরের অংশ সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হইয়া ভূমির সহিত 30° কোণে মিলিত হইল। উহা কতটা উচ্চে ভাঙ্গিয়াছিল? [C. U. '50]

15. একটি ভগ্ন বৃক্ষের উপরের অংশ বৃক্ষমূল হইতে 10 মিটার দূরে ভূমিকে স্পর্শ করিয়া 60° কোণ উৎপন্ন করিল। বৃক্ষটি মোট কত উচ্চ ছিল?

16. কোন স্মৃতিস্তম্ভের অনুভূমিক সরলরেখায় অবস্থিত P ও Q বিন্দু দুইটি হইতে উহার চূড়ার উন্নতিকোণ যথাক্রমে 30° ও 60° দেখা গেল। যদি PQ=80 ফুট হয়, তবে স্তম্ভটির উচ্চতা কত? [C. U. '45 ; G. U. '52 ; E. B. S. B. '50]

17. একটি অসমাপ্ত স্তম্ভের ভূমি হইতে 150 মিটার দূরবর্তী কোন বিন্দুতে উহার শীর্ষের উন্নতিকোণ 30°, স্তম্ভটিকে আর কতটা উঁচু করিলে ঐ বিন্দুতে চূড়ার উন্নতিকোণ 45° হইবে?

18. একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য ও উচ্চতার অনুপাত যখন $\sqrt{3} : 1$, তখন সূর্যের উন্নতিকোণের পরিমাণ কত?

19. নদীতীরে দণ্ডায়মান এক ব্যক্তি দেখিল সেস্থানে ঠিক বিপরীত তীরস্থ একটি খুঁটির সম্মুখকোণ 60°, কিন্তু সে তীর হইতে 60 মিটার সরিয়া গিয়া দেখিল সেস্থানে ঐ কোণ 30° হইল। খুঁটিটির উচ্চতা ও নদীর বিস্তার কত?

20. 300 মিটার উচ্চ একটি পাহাড় হইতে কোন স্তম্ভের চূড়ার ও পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° দেখা গেল। স্তম্ভের উচ্চতা কত?

21. কোন ঋজু পথের ঠিক সোজা উপরে অবস্থিত বাষ্পীয় যান হইতে দুইটি পর পর মাইল-ফলকের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° দেখা গেল। ঐ পথ হইতে বাষ্পীয় যানটি কত উচ্চে ছিল?

22. একটি ঋজু নদীর AB তীরের A বিন্দুতে অবস্থিত এক ব্যক্তি দেখিল যে, নদীর বিপরীত তীরস্থ C বিন্দুর সহিত A বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা AB-র সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। সে তীর বরাবর 200 গজ দূরে B বিন্দুতে গিয়া দেখিল ABর সহিত BC 60° কোণ করিয়াছে। নদীটির প্রস্থ কত? [C. U. '44]

23. 40 মিটার প্রশস্ত কোন পথের দুই পার্শ্বে সমান উচ্চ দুইটি খুঁটি আছে। উভয়ের মধ্যে পথের উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে খুঁটি দুইটির শীর্ষের উন্নতিকোণ 60° ও 30° হইলে, উহাদের উচ্চতা ও বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

24. কোন গম্বুজের চূড়ার উন্নতিকোণ সোজা পূর্বদিকে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে 60° এবং সোজা উত্তরে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে 45° দেখা গেল। ঐ বিন্দু দুইটির দূরত্ব 200 মিটার হইলে, গম্বুজটির উচ্চতা কত?

25. সূর্যের উন্নতিকোণ যখন 45° তখন সমতলে অবস্থিত কোন মিনারের ছায়ার যে দৈর্ঘ্য, ঐ উন্নতিকোণ 30° হইলে দৈর্ঘ্যটি তদপেক্ষা 60 ফুট অধিক হয়। ঐ মিনারের উচ্চতা নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '52]

26. সূর্যের উন্নতিকোণ 30° হইতে 60°তে পরিবর্তিত হওয়ায় একটি চিমনির ছায়ার দৈর্ঘ্য 50 ফুট কমিয়া গেল। চিমনির উচ্চতা কত? [C. U. '43 ; S. F. '71]

27. একটি পাহাড়ের শীর্ষ ও পাদদেশ হইতে 60 মিটার উচ্চ কোন স্তম্ভচূড়ার অবনতি কোণ ও উন্নতিকোণ যথাক্রমে 30° ও 60° দেখা গেল। পাহাড়ের উচ্চতা কত?

উত্তরমালা

বীজগণিত

Exercise 1

1. (i) $-32a^{15}b^{10}$ (ii) $729x^{12}y^{18}$ (iii) $-\dfrac{a^5b^{10}}{32x^{10}y^5}$

(iv) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

2. $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$.
3. $x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$.
4. $1+8a+24a^2+32a^3+16a^4$.
5. $a^5-10a^4+40a^3-80a^2+80a-32$.
6. $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$.
7. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$.
8. $32a^5-80a^4+80a^3-40a^2+10a-1$.
9. $729-1458c+1215c^2-540c^3+135c^4-18c^5+c^6$.
10. $32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3+10ab^4+b^5$.
11. $32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5$.
12. $243a^5+810a^4b+1080a^3b^2+720a^2b^3+240ab^4+32b^5$.
13. $a^8+8a^7+28a^6+56a^5+70a^4+56a^3+28a^2+8a+1$.
14. $x^9-9x^8+36x^7-84x^6+126x^5-126x^4+84x^3-36x^2$
$+9x-1$.
15. $a^{12}+6a^{10}+15a^8+20a^6+15a^4+6a^2+1$.
16. $x^{10}+5x^8+10x^6+10x^4+5x^2+1$.
17. $a^8-4a^6b^2+6a^4b^4-4a^2b^6+b^8$.
18. $1-6a^2+15a^4-20a^6+15a^8-6a^{10}+a^{12}$.
19. $x^3-y^3+z^3-3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2-3yz^2+3y^2z-6xyz$
20. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4-8a^3-24a^2b-24ab^2-8b^3$
$+24a^2+48ab+24b^2-32a-32b+16$.

21. 64. 22. 32. 23. 128. 24. 256. 24. (a) -1.

25. 32. 26. 242. 27. 0. 28. 0.

29. 243. 30. 1. 31. 8.

32. $10x^4y+20x^2y^3+2y^5$. 33. $12x+40x^3+12x^5$.

34. $2a^7+42a^5b^2+70a^3b^4+14ab^6$.

35. $12x^5a+40x^3a^3+12xa^5$.

Exercise 2

1. $(m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)$.
2. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. 3. $(2x+z)(2x-2y-z)$.
4. $(a+b-c-d)(a-b+c-d)$. 5. $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$.
6. $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$. 7. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.
8. $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$.
9. $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.
10. $(x+3)(x^2-3x+9)(x-3)(x^2+3x+9)$.
10. (a) $(2a-1)(4a^2+2a+3)$. 11. $(x+y-4a)(x-y-2a)$.
12. $(3x+11)(4x+7)$. 13. $(3x+7y)(7x-3y)$.
14. $(2a^2+5)(2a+3)(2a-3)$.
15. $(a^2+2a-4)(a^4-2a^3+8a^2+8a+16)$.
16. $(a+b-2c)(a^2+b^2+4c^2-ab+2ac+2bc)$.
17. $(a-1)(a^2-a-4)$. 18. $(x+2)(x-1)(x+15)$.
19. $(x+2)(x+3)(x+4)$. 20. $(x+1)(x-5)(x-2)^2$.
21. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$. 22. $(c+d+a-b)(c+d-a+b)$.
23. $(5a-3b)(15b-13a)$. 24. $(x-1)(x+1)(x-3)$.
25. $(a-5)(a+2)(a^2-3a+12)$.
26. $(x^2-3x-5)(x^2-3x-17)$. 27. $(x+y)(y+z)(z+x)$.
28. $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy-xz+yz)$.
28. (a) $-(a-b)(b-c)(c-a)$.
29. $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$. 29. (a) $3(b-c)(c-a)(a-b)$.
30. $-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.
31. $(a+b)(b+c)(c+a)$. 32. $3(2x-3y)(3y-z)(z-2x)$.
33. $(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)$. 34. $(x+a+3)(x-a-1)$.
35. $(x-3)(2x+3)(2x^2-3x+7)$. 36. $3(a+b)(b-c)(a+2b-c)$.
37. $(a+d+b+c)(a+d-b-c)(b-c+a-d)(b-c-a+d)$.
38. $2(a+c)(1+a)(1-c)$. 39. (i) $(x+5)(5x+1)(5x^2+14x+20)$
(ii) $(a^2+3a-2)(a^2+3a-3)$.
40. $(x^2+1)(x^2+x+1)$. 41. $(x-b)(x-c)(b-c)$.
42. $(x^2+2x+5)(x^4-2x^3-x^2-10x+25)$.
42. (a) $(2a-b)(a-b+1)$. 43. $(3a-2b+c)(2a+b+3c)$.
44. $(a^2-ab+b^2)(a^2-4ab+b^2)$.
45. $(a^2b^2+ab-c+1)(a^2b^2-ab+c+1)$.
46. $(x+1)(x^2-3x+1)(x^2+6x+1)$.

47. $-(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$.

48. $5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

49. $3(a-2b)(2a-b)(a+b)$. 50. $(x-1)(abx-acx-ac+bc)$.

Exercise 3

1. (i) 20 (ii) -4 (iii) -90 (iv) $2n^3-3n^2+5n+6$.

2. (i) 40 (ii) -31 (iii) -44 (iv) 688 (v) $-3\frac{1}{4}$.

6. 3 7. 174. 9. 5. 15. $x^7+x^6y+x^5y^2+\cdots+y^7$.

16. যদি $p+q+r+\cdots\cdots+l+m=0$ হয়।

17. $(p-p)'(pq-pq')=(q-q')^2$.

20. ap^3+bp^2+cp+d. 21. $m=2kn$ (k একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা)।

Exercise 4

প্রথমটি xএর, দ্বিতীয়টি yএর এবং তৃতীয়টি zএর মান দেওয়া হইল।

1. 13, 6 ; 2. 5, 2 ; 3. 1, 1 ; 4. 16, 4 ; 5. 6, 2 ;
6. -3, 3, 1 ; 7. 4, 10 ; 8. 1, 2 ; 9. 3, 1 ; 10. 0, 2, 4 ;
11. 5, 1 ; 12. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{7}$; 13. $\frac{1}{4}, -4$; 14. 3, 2 ;
15. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$; 16. 3, 3, 3 ; 17. 1, 3, 5 ; 18. 2, 3, 4 ;
19. 20, 15, 12 ; 20. $\pm4, \pm6, \pm7$; 21. $\frac{1}{2a}, \frac{1}{8a}, \frac{1}{4a}$;
22. 2, -1, 3 ; 23. 1, 1, 1 ; 24. a, b, c ;
25. $a(b-c), b(c-b), c(a-b)$; 26. $bc(b-c), ca(c-a), ab(a-b)$;
27. a, b, c ; 28. 4, 3, 5, 29. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; 30. $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}$
31. $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$; 32. 2, 1, 3 ;
33. $bc+ab-ca, ab+ca-bc, ca+bc-ab$, 34. $\pm1, \pm2, \pm3$;
35. $\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}$; 36. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; 37. $\frac{ac-b-bc}{a^2-b^2}, \frac{a+ac-bc}{a^2-b^2}$
38. $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; 39. 1, 2, 3 ; 40. 4, 5, 6 ; 41. 12, 12, 12 ;
42. 10, 20, 5 ; 43. -2, 2, 1 ;
44. $\frac{2}{a+b-c}, \frac{2}{a-b+c}, \frac{2}{b+c-a}$; 45. $x=45, y=46$.

Exercise 5

1. পিতার 38 ব., পুত্রের 14 ব. ; 2. 35, 45 ; 3. 69 . 4. 1215, 15 ;
5. $\frac{15}{26}$; 6. 93 ; 7. 72 ; 8. 54 ; 9. 5 টা 32 $\frac{4}{13}$ মি. ;
10. 84 পে. ; 11. ঘণ্টায় 2 কি. মি. ; 12. 2 : 3 ; 13. 21 গ্রাম ;
14. 10 ঘণ্টা ; 15. 28 ; 16. ঘণ্টায় 2 মা. ও 4 মা. ;

17. নৌকা ঘণ্টায় 4 মা., স্রোত ঘণ্টায় 1 মা. ; 18. 84 ;
19. 1800 খৃষ্টাব্দ ; 20. $\frac{3}{4}$ পে., 512 ; 21. চা 8 টা., কফি 9 টা. ;
22. 123 ; 23. 180 মাইল ; 24. $\frac{4}{15}$; 25. 210 কি. মি.
26. 27 সে. মি. ; 27. 300 টা., 180 টা ; 28. 24, 5 ;
29. 4 মি., 5 মি. ; 30 ঘণ্টায় 30 মা. ও 15 মা.

Exercise 6

1. 9 2. $\frac{1}{27}$ 3. 243 4. 16 5. $\frac{1}{9}$ 6. 125
7. $\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x}$ 8. x 9. $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{3}}$ 10. 1 11. $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$
12. -17 13. $a^{-\frac{17}{6}}b^{-\frac{31}{12}}$ 14. $a^{-2}b$ 15. $a^{\frac{32}{15x}}$ 16. $\sqrt[3]{a}$
17. $\frac{y^5}{x^{13}}$ 17 (a). $\sqrt[48]{2}$ 18. $x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}-1+2x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{4}}$

এবং $1-y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-yx^{-\frac{1}{2}}$.
19. $x^{2n}-y^{-2n}$ 20. $a^{-3m}+b^{3n}$
21. $x^{2\cdot 3^{n-1}}+x^{3^{n-1}}y^{3^{n-1}}+y^{2\cdot 3^{n-1}}$
22. $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$, অথবা $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$
23. $(x^m+y^n)(x^m-y^n)$ 24. x^a 25. $(a^4-b^4)^m$
26. a^{n^2-1} 27. x^{2abc} 28. $(x)^{-b^2}$ 29. $\frac{1}{(x)^{p^2+q^3}}$
29. (a). 1 30. 1 31. 27 31 (a). 1 32. 1 33. 1
34. $\left(\frac{p}{q}\right)^{m+n}$ 35. 1 36. 1 37. $\frac{2}{3}$ 38. $\frac{e^x-1}{e^x+1}$
38. (a). $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$ 39. 1 40. 1 41. $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$ 42. $\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$
42. (a). $\frac{\sqrt{a}}{b}$ 42. (b). 1 43. 1 54. $p=(q)^{\frac{2}{2a-1}}$.

Exercise 7

1. $\sqrt[12]{3^4}$, $\sqrt[12]{5^3}$ 2. (i) $\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{9}{4}}$, $\sqrt{x^4}$ (iii) $\sqrt[2]{8}$, , $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$, $\sqrt[3]{x^6}$
3. $\sqrt[3]{5}$ 4. (i) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt[3]{4}$ (ii) সাজানই আছে।
(iii) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{9}$; $\sqrt[6]{25}$ 5. $\sqrt{20}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[4]{x^4y}$
6. (i) $5\sqrt{7}$ (ii) $8\sqrt{7}$ (iii) $40\sqrt{3}$ (iv) $5\sqrt[3]{3}$ (v) $2\sqrt[3]{3}$.

Exercise 8

1. (i) 7 (ii) $12\sqrt{5}$ (iii) 16 (iv) $6\sqrt[6]{1944}$ (v) $60\sqrt{2}$

2. (i) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ (ii) $2\sqrt[3]{2}$ (iii) $\frac{1}{4}\sqrt[4]{20}$ 3. (i) 1·06 (ii) 2·31 (iii) 6·71 (iv) 3·15 (v) 5·83

4. (i) -1 (ii) $3+\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{21}$ (iii) $24+8\sqrt{6}+2\sqrt{15}+3\sqrt{10}$ (iv) $6\sqrt{15}-12\sqrt{2}-15+2\sqrt{30}$ (v) $2x-y$ (vi) $\sqrt{a^2+ab}-b\sqrt{a+b}-a+b^2$ (vii) $4+6\sqrt{2}$ (viii) $x\sqrt{x}+\sqrt{xy}-xy-y\sqrt{y}$ 5. (i) $5-2\sqrt{6}$ (ii) $7-4\sqrt{3}$ (iii) $14+4\sqrt{6}$ (iv) $2x-2\sqrt{x^2-y^2}$ (v) $b^2-2a\sqrt{b^2-a^2}$ (vi) $4x+2\sqrt{4x^2-25}$ 6. (a) $\frac{2+\sqrt{3}}{1}$

(b) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-2}{1}$ (c) $\frac{6\sqrt{10}+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+1}{19}$

(d) $\frac{5+2\sqrt{6}}{1}$

7. $\sqrt{3}$ 8. 1·691 9. $2x$ 10. $4x\sqrt{x^2-1}$

11. $\sqrt{a+x}$ 12. $\frac{4}{3}$ 13. $\frac{1}{2}(3\sqrt{3}+1)$ 16. 0 17. 0

20. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 21. $n(n-1)$ 22. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercise 9

[এখানে কেবল ধনাত্মক বর্গমূল দেওয়া আছে, তোমরা দুইটিই দিবে। যথা, $\pm(a+b)$]

1. $a+b$ 2. $x^2-2xy+7y^2$ 3. x^3+3x^2-4x+2

4. $x^2-ax+2a^2$ 5. $a^{-2}+a^{-1}b^{-1}-b^{-2}$ 6. $2x^{\frac{3}{4}}-3+4x^{-\frac{3}{4}}$

7. $7x^2-5xy+6y^2$ 8. $x^2-\frac{x}{2}-1$

9. x^2-3x+a 10. $1+a+\frac{a^2}{2}$ 11. $x-3-\frac{2}{x}$

12. $\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}$ 13. $2a^2+1+3a^{-2}$ 14. $x^2-x+\frac{1}{4}$

15. $x^2-1+\frac{1}{x^2}$ 16. $x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1$ 17. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3}$

18. $x^2+3x+1+\frac{1}{x}$ 19. $x^2+3x+\frac{1}{x}$ 20. $x^2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

21. $\frac{x}{y}-\frac{1}{2}-\frac{y}{x}$ 22. $2x^{\frac{3}{2}}-1+x^{-\frac{3}{2}}$ 23. $x-\frac{1}{x}+1$

24. $a+\frac{1}{a}-1$ 25. $2x-3-\frac{2}{x}$ 25. (a) $a-7-\frac{1}{2a}$

26. $2a^2+3a+\frac{3}{a}$ 27. $2x^2-3xy+4y^2$

28. x^2-ax+b^2 29. $x^3-2x+\frac{1}{x^3}$

30. $x^2+7x+11$ 31. $3x^2+7x-6$ 32. $x^2+\frac{1}{x^2}-2$

33. $x^2-11x+19$ 34. x^2+3x+1

35. $\sqrt{2}(x^2+xy+y^2)$ 36. $\frac{2x}{x^2-1}$ 37. $1+\frac{2ab}{a^2-b^2}$

38. $1+2a^2+a^4$ 39. $3-\sqrt{5}$ 40. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 41. $\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

42. $2\sqrt{7}-\sqrt{5}$ 43. $a-\sqrt{ax-a^2}$ 44. $\sqrt[4]{3}(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}})$

45. $\sqrt[4]{7}(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}})$ 46. $\sqrt{x+3y}+\sqrt{x-3y}$ 47. $2\sqrt{3x}-\sqrt{2y}$

49. $x=10$ 50. $c=3$ 51. -41 52. $a+2$

53. $-a+1$ 54. 1 55. $p^2=4q$.

Exercise 10

1. $5a^3b^4$ 2. $-9x^2y^{-1}$ 3. $-\frac{6a^5}{7b^6}$ 4. $2x+y$ 5. $a-1$

6. $1+a+a^2$ 7. $2ax-3by$ 8. $\frac{2}{x^2}-3x$ 9. $\frac{a}{2}+1$ 10. 85

11. $4x^2-5y^2$ 12. $2a+b+c$ 13. $2a^2+a-3$.

Exercise 11

1. ±5 2. ±1 3. $\pm\sqrt{2}$ 4. ±2

5. $\frac{4}{3}, -\frac{5}{14}$ 6. $3, \frac{1}{3}$ 7. $14, 2\frac{1}{4}$ 7. (a). ±3 8. $\frac{5}{2}, -\frac{2}{3}$

9. $7, -4\frac{9}{17}$ 10. $9\frac{15}{17}, -11$ 11. $5\frac{2}{3}, 9\frac{1}{2}$ 12. 3, 23

13. $2, -\frac{9}{2}$ 13. (a) $\pm\sqrt{3}$ 14. $12, \frac{3}{4}$ 15. $3\pm\sqrt{7}$ 16. $-3, 2$

17. $\sqrt{13}\pm3$ 18. 6, 9 19. $4, -2\frac{1}{4}$ 20. $3, -\frac{68}{9}$

21. $9, \frac{15}{13}$ 22. $-4, 2$ 23. $5, \frac{6}{5}$ 24. $0, -7$

25. $0, 2\frac{1}{4}$ 26. $-2a, -3a$ 27. $\frac{3\pm\sqrt{10}}{2}$ 8. $1, \frac{1}{3}$

29. $\frac{(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}}{3}$ 30. $\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

31. $0, a+b$ 32. $\frac{b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{3a}$ 33. $-p, -q$

34. $-\frac{2}{3}(1\pm\sqrt{7})$ 35. 43, -42 36. $2\frac{3}{7}, -1\frac{4}{9}$ 37. $1, \frac{1}{a}$

Exercise 12

1. $\frac{2}{5}$ 2. 8 (অবান্তর বীজ $\frac{1}{3}$) 3. $\sqrt{3}\pm4$ 4. -64.27 5. 3
6. $\dfrac{a(m-1)^2}{2m-1}$ 7. 0, -1 8. 1, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ 9. 5
10. 1 11. 4 12. 2, 1 13. 2, 3 14. -2, -2
15. ±2 16. 7 17. $\frac{3}{2}$ 18. 2, 3
19. $c, c-2b$ 20. ±6 21. $x=1, y=\frac{1}{2}$ 22. 2, 1
23. 6 24. 25 25. $-\frac{37}{29}$ 26. 5
27. $\dfrac{ab}{a+b}$ 28. $\dfrac{3\pm\sqrt{61}}{2}$ 29. 25 30. 1, -2 31. $\frac{1}{2}$
32. 2, -1 33. 0, 3 34. $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ 35. $\frac{2}{3}, -4$
36. $x=3, y=3$ 37. $\pm\dfrac{2v}{\sqrt{5}}$ 38. 3 39. $\frac{2}{3}$ 40. 3 41. 0, 2
42. $\frac{5}{3}$ 43. 0, $\dfrac{1}{1-a}$ 44. $\frac{1}{2}$ 45. ±3 বা ±2 46. ±1.

Exercise 13

1. 4 বা -1 বা -4 2. $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ 3. 5, 7 ; বা -7, -5
4. 10, 11 ; বা -11, -10 5. 7 বা -6 6. 11, 13 ; ব -13, -11
7. 121, 100 (২য় পক্ষে বর্গমূল -10 ধরিতে হইবে)
8. 6, 8 ; বা -8, -6 9. 8″, 15″ 10. 5 সে. মি., 12 সে. মি.
11. A 2 ঘ. B 3 ঘ. 12. 9 পে. 13. 20
14. 76 15. ঘণ্টায় 6 কি. মি. 16. 8″ 17. 20 সে. মি., 13 সে. মি.
18. ঘণ্টায় 4 কি. মি. 19. 19, 20 20. 7″ 21. 8, 9 ; বা -9, -8
22. $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ 23. $\frac{4}{5}$ 24. 9, 36 25. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
27. 9 আনা 28. $\dfrac{6}{-6}$ 29. 576 30. $\frac{3}{7}$.

Exercise 14

23. (5, 12), (12, 5) 24. (1, 1) 25. (0, 0), (4, 4)
27. (-2, 1), (4, 4) 28. 1·4 29. (3, 4), (4, 3)
30. 2·3 31. (5, 2) 32. 1 33. -1, 2 34. 1, 1·5
35. 5, $-\frac{1}{2}$ 36. $x=0, y=0$; অথবা $x=6, y=12$ 87. 3, $\frac{1}{3}$
39. 3, -1 40. 6·7 একক (প্রায়) 41. 1, 3 42. 2·4, $-$·4
43. 7·5 একক 44. 1 45. 3. ·5 46. -1, -2
48. 2, 4 40. (0, 0), (1, 1) 50. 4 ; -1
51. (i) 2 ; (ii) -1 ; (iii) ·4, -2·4.

ত্রিকোণমিতি

Exercise 1

1. (i) $3°40'14''$ (ii) $8°27'30''$ (iii) $21°36'$
2. (i) $4^g 62' 35''$ (ii) $7^g 3' 33\cdot\dot{3}''$ (iii) $10^g 72' 5''$ (iv) $3^g 24' 60''$
3. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{27}{40}$ (iii) $1\cdot35$ (iv) $5\frac{13}{3375}$ (v) $\cdot503524$ (vi) $\frac{2}{3}$ (vii) 20
4. (i) $33^g 56' 66\cdot\dot{6}''$ (ii) $70^g 27' 50''$ (iii) $66^g 79' 16\cdot\dot{6}''$ (iv) 120^g
   (v) $16^g 66' 66\cdot\dot{6}''$
5. (i) $36°19'1\cdot776''$ (ii) $54°8'1''$ (iii) $36°24'29\cdot664''$
   (iv) $114°31'43\cdot\dot{6}\dot{3}''$ (v) $100°$ (vi) $120°$
6. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{151\pi}{360}$ (iii) $\frac{3407\pi}{13500}$ (iv) $\frac{3}{5}\pi$ (v) $\frac{44}{125}\pi$
   (iv) $1\cdot626286\pi$.
7. $35°, 19°$; $\frac{350}{9}$g, $\frac{190}{9}$g. 8. $110\cdot5°, 29\cdot5°$; $\frac{221\pi^c}{360}, \frac{59\pi^c}{360}$
9. (i) $100°, 60°$ (ii) $250^g, 150^g$, (iii) $30\pi^c, 18\pi^c$, 10. $66\cdot\dot{6}^g$
11. $\frac{4\pi}{9}, \frac{2}{5}\pi$ 12. $22\frac{1}{2}°, 67\frac{1}{2}°$ 13. $\frac{\pi}{4}$ 14. $63°$
15. $66°40', 21°36'$ 16. $\frac{\pi}{3}$ 17. $96°$ 19. $\frac{(n-2)\pi}{n}$
19. $\left(\frac{90}{\pi}+\frac{1}{2}\right)°, \left(\frac{90}{\pi}-\frac{1}{2}\right)°$ অথবা, $\frac{641°}{22}, \frac{619°}{22}$
20. $54°, 81°, 108°, 135°, 162°$; $\frac{3\pi}{10}, \frac{9\pi}{20}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{19}$
22. 28 গ. 23. $90°$ 24. $6\frac{33}{35}$ ই. 25. $3\frac{1}{7}$ ই.
26. 2500 ফু. 27. 110 ই. 28. 856720 মাইল (আসন্ন)
29. $55\frac{1}{9}$ ফু. 30. $\frac{55}{567}$ মাইল 31. $1°25'57''$ (প্রায়)
32. 58·6432 ই. 33. শীর্ষকোণ $7°\ 12'$ বা 8^g এবং প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ $86°24'$ বা 96^g 34. $56\frac{16}{19}, 60, 63\frac{3}{19}$ ডিগ্রী 36. $85\frac{10}{11}$ ডিগ্রী
37. 330 ই. 38. 20 মা. 39. 95898521 মাইল (প্রায়)
40. 360 গজ 41. $\frac{7}{12}\pi^c$ 43. 1 টা 36 মিনিট 44. $7'9\cdot\dot{5}\dot{4}''$ 45. 5 : 4

Exercise 2

38. 1 39. 2 40. 0 41. 1 42. 0 43. 0
44. 0 45. 0.

Exercise 3

1. $\sin\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$
$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$ 2. $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}$ 3. $\frac{12}{5}, \frac{13}{5}$
4. $\frac{3}{5}, \frac{5}{4}$ 5. $\frac{3}{4}$ 6. $\frac{60}{11}, \frac{61}{60}$ 13. sin $\frac{4}{5}$, cos $=\frac{3}{4}$, cot $=\frac{3}{4}$,
sec $=\frac{5}{3}$, cosec $=\frac{5}{4}$ 14. $\frac{4}{5}$ 15. $\frac{1}{7}$.

Exercise 4

8. $\frac{1}{8}$ 9. 1 10. $\frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ 11. 9 12. 1 13. $1\frac{1}{4}$

14. $9\frac{2}{3}$ 19. 0 20. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Exercise 5

1. $-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. 1·366……, 1·154…

4. প্রথমটিতে 45° ও 135°, দ্বিতীয়টিতে 120°, 5. (i) 60°, (ii) 120°, (iii) 30° বা 150°.

Exercise 6

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 2. $x^2+y^2=b^2$ 3. $xy=a^2$

4. $ac=b^2$ 5. $xy=ab$.

Exercise 7

1. 30° 2. 60° 3. $\theta=30°$ বা 60° 4. 0° বা 90°

5. 60° 6. 45° 7. 45° 8. 6°

9. 5° 10. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 11. $x=3, \theta=30°$

12. $p=2, \theta=60°$ 13. $-\frac{5}{3}$ 15. 60° 16. 30°, 150°

17. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercise 8

1. 173·2 মি. বা 100 $\sqrt{3}$ মি. 2. 150 $\sqrt{3}$ মিটার 3. 103.92 ফু.
4. 10·392 ফু. 5. 9 মি. 6. 15 $\sqrt{2}$ ফু. 7. 30°
8. 63·3 ফু. 9. 17·32 ফু. 10. 15 $\sqrt{3}$ ফু.
11. 141·96 ফু. 12. 94·64 ফু. 13. 165·36 মি. (প্রায়) 14. 40 ফু.
15. 37·32…মি. 16. 40 $\sqrt{3}$ ফু. 17. 63·4 মি. (প্রায়) 18. 30°
19. 51·96 মি., 30 মি. 20. 200 মি. 21. ·866 মা. বা ·433 মা.
22. 173·2 গজ 23. উচ্চতা=17·32 মি., একটি খুঁটি হইতে 10 মি. দূরে
24. 173·2 মিটার 25. 81·96 ফুট (প্রায়) 26. 25 $\sqrt{3}$ ফুট
27. 80 মিটার।

দশম শ্রেণী

Mensuration (পরিমিতি)

ঘনবস্তু (Solids)

সংজ্ঞা : তোমরা জান একখানি পুস্তক বা ইষ্টক অথবা একটি গোলাকার বল এক একটি ঘন বস্তু এবং উহাদের প্রত্যেকে কিছু পরিমাণ দেশ (Space বা শূন্যস্থান) দখল করিয়া অবস্থান করে।

1. সমতল অথবা বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত দেশ বা শূন্যস্থ স্থানকে **ঘনবস্তু** বা **ঘন** (Solid) বলা হয়।

2 সমতলসমূহ দ্বারা বেষ্টিত স্থানকে বহুতলক (polyhedron) বলে।

দ্রষ্টব্য : সমতলস্থ কোন স্থানকে বেষ্টন করিতে হইলে যেমন ন্যূনপক্ষে তিনটি সরলরেখা দরকার হয়, তদ্রূপ শূন্যস্থ কোন স্থানকে বেষ্টন করিতে হইলে ন্যূনপক্ষে চারিটি সমতল দরকার।

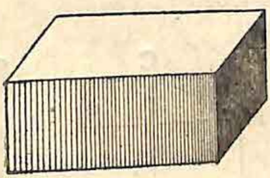
এই সমতলগুলিকে ঘন বস্তুর তল (faces) বলে এবং দুইটি তল যে সরলরেখায় ছেদ করে সেই সরলরেখাকে প্রান্ত রেখা বা প্রান্তিক (edge) বলে।

দৃষ্টান্ত : একটি ইষ্টক ছয়টি সমতল ক্ষেত্র দ্বারা বেষ্টিত। এই তলগুলি 12-টি সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে।

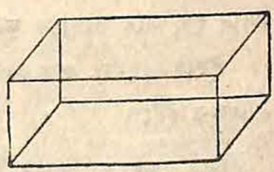
একটি ক্রিকেট বল একটি বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত।

3. যে ঘন তিন জোড়া সমান্তরাল সমতল দ্বারা বেষ্টিত তাহাকে ঘন সামান্তরিক (Parallelopiped বলে।

ইহার প্রতি তল সামান্তরিক এবং দুই দুইটি বিপরীত তল সর্বসম।



চিত্র 1



চিত্র 2

4. ঘন সামান্তরিকের তলগুলি যদি আয়তক্ষেত্র হয়, তবে উহাকে আয়ত বা সমকোণী চৌপল (Rectangular Parallelopiped) বলে। ইহার তলগুলি পরস্পর সমকোণে সংযুক্ত।

যেমন একটি কাঠের বাক্স। ইহার ছয়টি তল আছে। যথা—নীচে একটি, উপরে একটি এবং চারি পাশে চারিটি, মোট এই ছয়টি।

3 নম্বর চিত্রে তলগুলি OAQB, CRPS, OASC, OBRC, BRPQ এবং AQPS.

আয়ত ঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বা বেধ আছে।

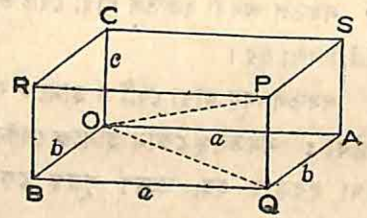
ঘনফল : ঘনবস্তুর তলগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ দেশকে উহার আয়তন বা ঘনফল (volume) বলে। ঘনফলের তিনটি মাত্রা থাকে। ক্ষেত্রফলের মাত্রা তুইটি। অতএব, ঘনফলকে ঘন এককে এবং ক্ষেত্রফলকে বর্গ এককে প্রকাশ করিতে হয়।

মনে কর, কোন আয়ত ঘনের দৈর্ঘ্য a একক, প্রস্থ b একক এবং উচ্চতা c একক। অতএব,

(ক) আয়ত ঘনের তলগুলির **ক্ষেত্রফল**

$=(2ab+2bc+2ac)$ বর্গ একক

$=2(ab+bc+ca)$ বর্গ একক।



চিত্র 3

(খ) আয়ত ঘনের **ঘনফল**

= ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

$=abc$ ঘন একক।

(গ) এখানে [চিত্র 3] OP, আয়ত ঘনের **কর্ণ**।

$OP^2=OQ^2+PQ^2$ [$\because$ $\angle OQP=1$ সমকোণ]

$=OA^2+AQ^2+PQ^2$ [$\because$ $\angle OAQ=$ সমকোণ।]

$=a^2+b^2+c^2$,

$\therefore$ কর্ণ $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2+\text{প্রস্থ}^2+\text{উচ্চতা}^2}$

5. যদি আয়ত ঘনের তলগুলি বর্গক্ষেত্র হয় অর্থাৎ উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হয়, তবে তাহাকে **ঘনক** (cube) বলে।

ইহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা প্রত্যেকটি a একক হইলে

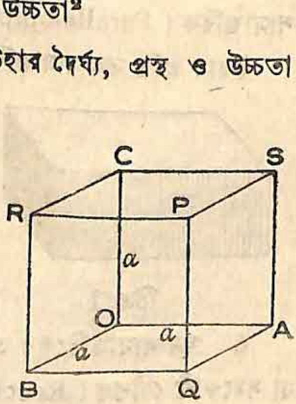
(ক) ঘনকের **তলগুলির ক্ষেত্রফল**

$=2a^2+2a^2+2a^2=6a^2$ বর্গ একক।

(খ) **ঘনকের ঘনফল** $=a^3$ ঘন একক।

(গ) ঘনকের কর্ণ $=\sqrt{3a^2}$

$=a\sqrt{3}$ দৈর্ঘ্য একক।



চিত্র 4

উদাহরণমালা

উদা. 1. যে আয়ত ঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 2 ফুট, 3 ফুট ও 4 ফুট তাহার তলসমূহের ক্ষেত্রফল, ঘনফল এবং কর্ণ কত ?

তলসমূহের ক্ষেত্রফল $=2(bc+ca+ab)$

$=2(3\times4+4\times2+2\times3)$ বর্গ ফুট

$=2(12+8+6)$ বর্গ ফু. $=52$ বর্গ ফুট।

উহার ঘনফল $=abc=2\times3\times4$ ঘন ফু. $=24$ ঘন ফুট।

উহার কর্ণ $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{4+9+16}$ ফুট $=\sqrt{29}$ ফুট।

উদা. 2. একটি ঘনকের প্রত্যেক বাহু 5 সে. মি. হইলে উহার তলগুলির ক্ষেত্রফল এবং উহার ঘনফল ও কর্ণ নির্ণয় কর।

তলসমূহের ক্ষেত্রফল $=6a^2=6\times25$ বর্গ সে. মি. $=150$ বর্গ সে. মিটার।

উহার ঘনফল $=a^3=(5)^3$ ঘন সে. মি. $=125$ ঘন সে. মিটার,

এবং কর্ণ $=a\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ সেন্টিমিটার।

উদা. 3. কোন ঘনকের তলসমূহের ক্ষেত্রফল মোট 346·56 বর্গ সেন্টিমিটার হইলে উহার প্রান্তিকীর পরিমাণ কত ? [C. U. 1856]

মনে করা যাক প্রতি প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য a সে. মি.

$\therefore\ 6a^2=346{\cdot}56$ বর্গ সে. মি.

$\therefore\ a^2=\dfrac{346{\cdot}56}{6}$ বর্গ সে. মি. $=57{\cdot}76$ বর্গ সে. মি.

$\therefore\ a=\sqrt{57{\cdot}76}$ সে. মি. $=7{\cdot}6$ সে. মি.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রান্তিকী $=7{\cdot}6$ সেন্টিমিটার।

উদা. 4. কোন ঘনকের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 ফুট হইলে উহার তলসমূহের মোট ক্ষেত্রফল কত ?

মনে করা যাক প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য a ফুট।

$\therefore$ কর্ণ $=\sqrt{3}.a,\quad \therefore\ 5=\sqrt{3}\,a,\quad \therefore\ a=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ ফুট।

$\therefore$ তলগুলির ক্ষেত্রফল $=6a^2=6\times\frac{25}{3}$ বর্গ ফু. $=50$ বর্গ ফুট।

উদা. 5. একটি আয়ত ঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা 5, 3, 2এর সমানুপাতিক এবং উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 558 বর্গ সে. মি. হইলে, উহার মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই

$\dfrac{\text{দৈর্ঘ্য}}{5}=\dfrac{\text{প্রস্থ}}{3}=\dfrac{\text{উচ্চতা}}{2}=k$ (মনে কর)

সুতরাং, দৈর্ঘ্য $=5k$, প্রস্থ $=3k$, উচ্চতা $=2k$……(1)

$\therefore$ সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $=2(5k\times3k+5k\times2k+3k\times2k)=62k^2$

সুতরাং $62k^2=558$ বর্গ সে. মি. (স্বীকার),

বা, $k^2=9$ বর্গ সে. মি., $\therefore$ $k=3$ সে. মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=3$ সে. মি. $\times 5=15$ সে.মি., প্রস্থ $=3$ সে.মি. $\times 3=9$ সে.মি. এবং উচ্চতা $=3$ সে. মি. $\times 2=6$ সে. মিটার।

উদা. 6. কোন ঘনকের তলগুলির মোট ক্ষেত্রফল 3 ইঞ্চি, 4 ইঞ্চি এবং 1 ফুট প্রান্তিকীবিশিষ্ট তিনটি ঘনকের তলগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হইলে ঐ ঘনকটির প্রান্তিকী কত হইবে?

কোন ঘনকের প্রান্তিকী a একক হইলে, উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হয় $6a^2$.

$\therefore$ এখানে 3টি ঘনকের তলগুলির ক্ষেত্রফলসমূহের সমষ্টি

$=6(3^2+4^2+12^2)$ বর্গ ইঞ্চি $=6\times169$ বর্গ ইঞ্চি।

আবার, প্রদত্ত ঘনকটির তলগুলির ক্ষেত্রফল $=6\times$ (প্রান্তিকী $)^2$

$\therefore$ $6\times$ (প্রান্তিকী $)^2=6\times169$ বর্গ ই.

$\therefore$ (প্রান্তিকী $)^2=169$ বর্গ ইঞ্চি।

$\therefore$ নির্ণেয় প্রান্তিকী $=\sqrt{169}$ ই. $=13$ ইঞ্চি।

উদা. 7. একটি কাঠের সিন্দুকের বাহিরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $5\frac{1}{2}$ ফুট, $4\frac{2}{3}$ ফুট ও $5\frac{1}{6}$ ফুট এবং উহার কাঠ 1 ইঞ্চি পুরু। প্রতি বর্গফুটে 72 পয়সা হিসাবে উহার ভিতরটি রং করিতে কত ব্যয় হইবে?

$5\frac{1}{2}$ ফুট $=66$ ই., $4\frac{2}{3}$ ফু. $=56$ ই., $5\frac{1}{6}$ ফু. $=62$ ইঞ্চি।

কাঠ 1 ইঞ্চি পুরু বলিয়া সিন্দুকের ভিতরের দিকের

দৈর্ঘ্য $=(66$ ই. -1 ই. $\times2)=64$ ই., প্রস্থ $=(56$ ই. -1 ই. $\times2)=54$ ই. এবং উচ্চতা $=(62$ ই. -1 ই. $\times2)=60$ ইঞ্চি।

$\therefore$ ভিতরের তলগুলির ক্ষেত্রফল

$=2(64\times54+64\times60+54\times60)$ বর্গ ইঞ্চি

$=2\times10536$ বর্গ ই. $=\frac{2\times10536}{144}$ বর্গ ফুট

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $=\frac{2\times10536}{144}\times72$ পয়সা $=105$ টা. 36 পয়সা।

Exercise 1

1. একটি ঘনকের দৈর্ঘ্য 7 ফুট হইলে উহার তলগুলির মোট ক্ষেত্রফল এবং উহার ঘনফল কত হইবে?

2. একটি ঘনকের কর্ণ $3\sqrt{3}$ সে. মিটার ; উহার তলগুলির মোট ক্ষেত্রফল এবং উহার ঘনফল নির্ণয় কর।

3. যে ঘনকের তলগুলির সমগ্র ক্ষেত্রফল 37·5 বর্গ সে. মি. তাহার প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য কত ?

4. একটি ঘনকের তলগুলির সমগ্র ক্ষেত্রফল যত একক, উহার ঘনফলও তত একক। ঐ ঘনকের প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য কত একক ?

5. একটি আয়ত ঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 8 ফুট, 6 ফুট ও 5 ফুট। উহার তলগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর।

6. একটি ঘনকের তলসমূহের ক্ষেত্রফল 42 বর্গফুট 96 বর্গ ইঞ্চি, উহার প্রান্তিকীয় দৈর্ঘ্য কত ?

7. একটি আয়ত ঘনের মাত্রাগুলির অনুপাত 4 : 3 : 2, উহার তলগুলির সমগ্র ক্ষেত্রফল 1300 বর্গ সে. মিটার হইলে, উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কত ?

8. একটি ঘনকের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে 2 ফু. 3 ই. ও 3 ফুট প্রান্তিকীবিশিষ্ট দুইটি ঘনকের তলগুলির মোট ক্ষেত্রফলের সমান। প্রথম ঘনকটির প্রান্তিকী নির্ণয় কর।

9. একটি আয়ত ঘনের তলগুলির সামগ্রিক ক্ষেত্রফল 592 বর্গ ইঞ্চি। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 1 ফুট ও 10 ইঞ্চি। উহার উচ্চতা কত ?

10. বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট কোন আয়ত ঘনের তলগুলির সমগ্র ক্ষেত্রফল 506 বর্গফুট এবং উচ্চতা 6 ফুট। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

11. অর্ধ ইঞ্চি পুরু তক্তা দ্বারা নির্মিত কোন বাক্সের বাহিরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16 ই., 12 ই. ও 8 ই. হইলে প্রতি বর্গফুটে 1 আ. 6 পাই হিসাবে উহার ভিতরটি রং করিতে কত ব্যয় হইবে ?

12. প্রতি বর্গফুট 8 পাই হিসাবে কোন ঘনকের তলসমূহ রং করিতে 5 টাকা 1 আনা খরচ হইল। ঐ ঘনকের প্রান্তিকীর দৈর্ঘ্য কত ?

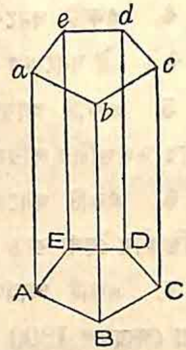
13. 30 ফুট দীর্ঘ, 24 ফুট প্রশস্ত ও 18 ফুট উচ্চ কোন ঘরের মধ্যে কত দীর্ঘতম মাপের দণ্ড স্থাপন করা যায় ? [P. U.]

৬। প্রিজম্ (Prism)

কয়েকটি সমতল দ্বারা বেষ্টিত ঘনের যদি প্রান্ততল দুইটি (ends) সমান্তরাল ও সর্বসম হয় এবং পার্শ্বতলসমূহ (side faces) সামান্তরিক হয়, তবে উহাকে প্রিজম্ বলে।

5 নং চিত্রে অঙ্কিত প্রিজ্‌ম্‌টির একটি প্রান্ততল ABCDE এবং আর একটি প্রান্ততল $abcde$; এই তল দুইটি সর্বসম এবং প্রত্যেকটির পাঁচটি করিয়া বাহু A B ba, B C cb, C cd D প্রভৃতি তলগুলিকে ইহার **পার্শ্বতল** বলে। এই পার্শ্বতলগুলি সামান্তরিক।

সর্বসম প্রান্ততলগুলি ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ বা বহুভুজ হইতে পারে এবং তদনুসারে ইহার ত্রিভুজ প্রিজ্‌ম্‌ (triangular prism), চতুর্ভুজ প্রিজ্‌ম্‌ প্রভৃতি নাম হয়।



চিত্র

প্রিজ্‌ম্‌টি যে প্রান্ততলের উপর দণ্ডায়মান থাকে তাহাকে প্রিজ্‌মের **ভূমি** (base) বলে। চিত্রে ABCDE তলটি প্রিজ্‌ম্‌টির ভূমি।

প্রিজ্‌মের প্রান্ততল দুইটির মধ্যে লম্ব দূরত্বকে উহার উচ্চতা বলে।

প্রতি দুইটি পার্শ্বতল যে সরলরেখায় ছেদ করে সেই সরলরেখাকে পার্শ্বপ্রান্তিকী (side edge) বলে।

যে প্রিজ্‌মের পার্শ্বপ্রান্তিকীগুলি প্রান্ততলের উপর লম্ব হয় তাহাকে **লম্ব প্রিজ্‌ম্‌** (right prism) বলে। এতদ্ব্যতীত অন্য প্রিজ্‌মকে **তির্যক প্রিজ্‌ম্‌** (oblique prism) বলে।

লম্ব প্রিজ্‌মের পার্শ্বতলগুলি আয়তক্ষেত্র হয় এবং পার্শ্বপ্রান্তিকীকে উহার উচ্চতা বলা হয়। যে কোন প্রিজ্‌মের পার্শ্বপ্রান্তিকীগুলি সমান হয়।

[**দ্রষ্টব্য**ঃ আয়তঘন একটি লম্ব প্রিজ্‌ম্‌]

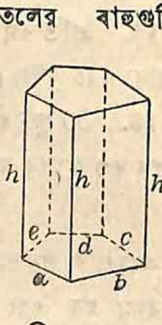
যদি লম্ব প্রিজ্‌মের উচ্চতা h একক এবং প্রান্ততলের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য $a, b, c, d, \cdots$ একক হয় তবে

(ক) লম্ব প্রিজ্‌মের পার্শ্বতলসমূহের ক্ষেত্রফল

$=ah+bh+ch+dh+\cdots$

$=(a+b+c+d+\cdots)h$

=প্রান্ততলের পরিসীমা × উচ্চতা



চিত্র নং 6

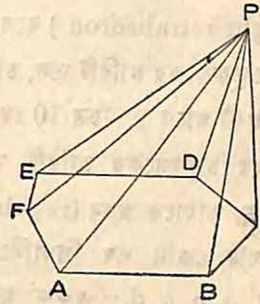
(খ) লম্ব প্রিজ্‌মের ঘনফল

=প্রান্ততলের ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

৭। পিরামিড (Pyramid)

কতিপয় সমতল দ্বারা বেষ্টিত যে ঘনের ভূমিতলটি একটি যে কোন সরলরৈখিক ক্ষেত্র এবং যাহার পার্শ্বতলগুলি ঐ ভূমিতলের বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে মিলিত সাধারণ শীর্ষবিশিষ্ট কতিপয় ত্রিভুজ, তাহাকে পিরামিড (pyramid) বলে।

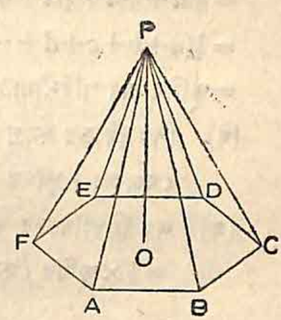
অতএব, পিরামিডের প্রান্ততলটি একটি ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ বা বহুভুজ এবং ইহার পার্শ্বতলগুলি কতিপয় সমশীর্ষ ত্রিভুজ। চিত্র 7 দেখ।



চিত্র 7

প্রান্ততলটিকে পিরামিডের ভূমি (base) এবং ত্রিভুজগুলির সাধারণ শীর্ষবিন্দুটিকে ইহার **শীর্ষ** (vertex) বলা হয়।

শীর্ষ হইতে ভূমির উপরে অঙ্কিত লম্বকে ইহার উচ্চতা (height) বলা হয়। প্রতি দুইটি ত্রিভুজ যে সরলরেখায় ছেদ করে সেই সরলরেখাকে পার্শ্বপ্রান্তিকী বলে।



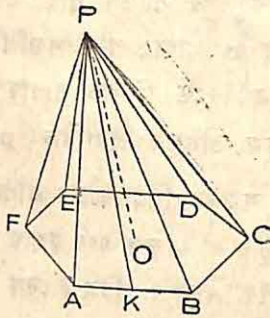
চিত্র 8

যদি পিরামিডের ভূমি একটি বহুভুজ হয় এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমির কেন্দ্র (অর্থাৎ ঐ বহুভুজের পরিবৃত্তের বা অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র) দিয়া যায় তবে ঐ পিরামিডকে **লম্ব পিরামিড** (right pyramid) বলে। লম্ব পিরামিডের ভূমিটি আয়ত বা বর্গক্ষেত্র হইলে উহার শীর্ষ হইতে অঙ্কিত লম্বটি ভূমির কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে মিলিত হয়। লম্ব পিরামিডের ভূমিটি সুষম ক্ষেত্র হইলে, উহাকে সুষম (regular) পিরামিড বলে। ইহার পার্শ্বতলগুলি সর্বসম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইল। চিত্র 8 দেখ।

এতদ্ব্যতীত অন্য পিরামিডগুলিকে তির্যক পিরামিড বলে। চিত্র 9 দেখ। এই পিরামিডের শীর্ষ হইতে প্রান্ততলের যে কোন বাহুর উপরে লম্ব টানিলে এই লম্বকে **তির্যক উচ্চতা** (slant height) বলে।

দ্রষ্টব্য : 9 নম্বর চিত্রে PO পিরামিডের উচ্চতা এবং PK উহার তির্যক উচ্চতা।

যে পিরামিডের ভূমি একটি ত্রিভুজ তাহাকে **চতুস্তলক** (tetrahedron) বলে।



চিত্র 9

ইহার ভূমি সমবাহু ত্রিভুজ এবং পার্শ্বতলত্রয় সর্বসম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইলে উহাকে লম্ব চতুস্তলক (right tetrahedron) বলে।

চতুস্তলকের চারিটি তল, চারিটি শীর্ষ এবং ছয়টি প্রান্তিকী থাকে। চিত্র 10 দেখ।

যে চতুস্তলকের চারিটি তলই সমান ও সমবাহু ত্রিভুজ, তাহাকে সুষম (regular) চতুস্তলক বলে।

যদি কোন লম্ব পিরামিডের ভূমির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য $a, b, c, d, \cdots$ একক হয় এবং পিরামিডের উচ্চতা h এবং তির্যক উচ্চতা l একক হয়, তবে

(ক) লম্ব পিরামিডের পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}al+\frac{1}{2}bl+\frac{1}{2}cl+\frac{1}{2}dl+\cdots$

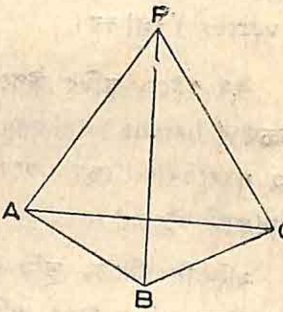
$=\frac{1}{2}(a+b+c+d+\cdots)l$

= ভূমির অর্ধ পরিসীমা × তির্যক উচ্চতা।

(খ) পিরামিডের সমগ্রতল = পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল + ভূমির ক্ষেত্রফল।

(গ) লম্ব পিরামিডের ঘনফল।

$=\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা।



চিত্র 10

উদাহরণমালা 2

উদা. 1. 9 ইঞ্চি উচ্চ একটি লম্ব প্রিজ্‌মের ভূমি 1 ফু. 4 ই. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ। ইহার পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল কত?

প্রিজ্‌মের আয়ত পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা।

এখানে ভূমির পরিসীমা = সমবাহু ত্রিভুজটির পরিসীমা

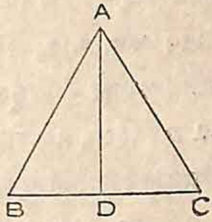
= 1 ফু. 4 ই. × 3 = 4 ফুট.

এবং উচ্চতা = 9 ইঞ্চি = $\frac{3}{4}$ ফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল = 4 ফুট × $\frac{3}{4}$ ফুট = 3 বর্গফুট।

উদা. 2. কোন লম্ব প্রিজ্‌মের ভূমি 6 সেন্টিমিটার বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ এবং উচ্চতা $16\sqrt{3}$ সেন্টিমিটার। ঐ প্রিজ্‌মের ঘনফল নির্ণয় কর।

মনে করা যাক, ABC সমবাহু ত্রিভুজটি লম্ব প্রিজ্মের ভূমি এবং AD, BC-র উপর লম্ব। ∴ D, BC-র মধ্যবিন্দু,



চিত্র 11

∴ $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 6^2 - 3^2 = 27$,

∴ AD = সে. মি. $= 3\sqrt{3}$ সে. মি.

∴ ভূমির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

$= 9\sqrt{3}$ বর্গ সে. মি.

∴ প্রিজ্মের ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= 9\sqrt{3} \times 16\sqrt{3}$ ঘন সে. মি. $= 144 \times 3$ ঘন সে. মি.

$= 432$ ঘন সেন্টিমিটার।

উদা. 3. একটি লম্ব প্রিজ্মের ভূমি একটি ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির বাহুগুলি 3 ফুট, 4 ফুট ও 5 ফুট দীর্ঘ এবং প্রিজ্মটির ঘনফল 80 ঘনফুট। উহার উচ্চতা ও সমগ্র তলপরিমাণ নির্ণয় কর।

এখানে দেখা যায় যে $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$.

∴ ত্রিভুজটি সমকোণী এবং সমকোণলগ্ন বাহু দুইটি 3 ফুট ও 4 ফুট।

∴ ভূমির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4$ বর্গ ফুট $= 6$ বর্গফুট।

এক্ষণে, উচ্চতা $= \dfrac{\text{ঘনফল}}{\text{ভূমির ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{80 \text{ ঘনফুট}}{6 \text{ বর্গফুট}} = \frac{40}{3}$ ফুট $= 13$ ফুট 4 ইঞ্চি।

আবার, ভূমির পরিসীমা $= (3+4+5)$ ফুট $= 12$ ফুট,

∴ পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল $= 12$ ফুট $\times \frac{40}{3}$ ফুট $= 160$ বর্গফুট ;

∴ সমগ্র তলপরিমাণ = পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল + প্রান্ততল দুইটির ক্ষেত্রফল

$= (160$ বর্গ ফু. $+ 6$ বর্গ ফু. $\times 2) = 172$ বর্গফুট।

উদা. 4. সুষম নবভুজ ভূমিবিশিষ্ট একটি লম্ব-প্রিজ্মের পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল 1080 বর্গফুট। উহার উচ্চতা 12 ফুট হইলে, ভূমির প্রত্যেক বাহুর মাপ কত ?

ভূমিটি সুষম নবভুজ বলিয়া উহার নয়টি বাহুই সমান।

∴ ভূমির পরিসীমা = বাহুর দৈর্ঘ্য × 9.

আবার, ∵ ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা = পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল,

∴ এখানে $9 \times$ বাহুর দৈর্ঘ্য $\times 12$ ফুট $= 1080$ বর্গফুট (স্বীকার)

∴ নির্ণেয় বাহুর দৈর্ঘ্য $= \dfrac{1080 \text{ বর্গ ফু.}}{9 \times 12 \text{ ফুট}} = 10$ ফুট।

উদা. 5. একটি 6 সে. মি. উচ্চ লম্ব-পিরামিডের ভূমি 4 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ। ঐ পিরামিডের ঘনফল ও সমগ্র পার্শ্বতল পরিমাণ নির্ণয় কর।

মনে করা যাক, পিরামিডের P শীর্ষ এবং ABC সমবাহু ত্রিভুজটি উহার ভূমি।
AD ⊥ BC হইলে, AD ত্রিভুজের মধ্যমা।

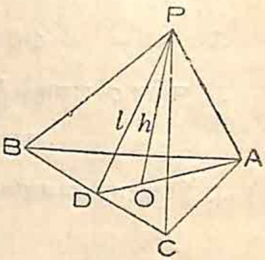
মনে কর, O, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

∴ PO, ABC সমতলের উপর লম্ব।

∴ PO, AD মধ্যমার উপর লম্ব।

মনে করা যাক PD $=l$ এবং PO $=h$,

∴ $h=6$ সে. মিটার।



চিত্র 12

এখন $AD^2=AB^2-BD^2=4^2-2^2=16-4=12$,

∴ $AD=\sqrt{12}$ সে. মি. $=2\sqrt{3}$ সে. মিটার।

∴ $OD=\frac{1}{3}AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ সে. মি. $=\frac{2}{\sqrt{3}}$ সে. মিটার।

∴ $l^2=h^2+OD^2=36+\frac{4}{3}=\frac{112}{3}$ বর্গ সে. মি.

∴ $l=\sqrt{\frac{112}{3}}$ সে. মি. $=\frac{4.\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ সে. মিটার।

পিরামিডের ঘনফল $=\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times6$ ঘন সে.মি. $=8\sqrt{3}$ ঘন সে.মি.।

তলসমূহের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ পরিসীমা $\times$ তির্যক উচ্চতা।

$=\frac{1}{2}\times12\times\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ বর্গ সে. মি. $=8\sqrt{21}$ বর্গ সে. মিটার।

উদা. 6. লম্বভাবে অবস্থিত 12 ফুট উচ্চ কোন স্তম্ভের ভূমি একটি সুষম পঞ্চভুজ। ভূমির প্রত্যেক বাহু 4 ইঞ্চি এবং এক বর্গফুট চুনকাম করিতে খরচ 25 পয়সা হইলে, ঐ স্তম্ভের লম্বতলগুলিকে চুনকাম করিতে কত ব্যয় হইবে?

পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল $=$ ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা।

এখানে ভূমির পরিসীমা $=4\times5$ ই. $=\frac{4\times5}{12}$ ফু. $=\frac{5}{3}$ ফুট,

এবং স্তম্ভের উচ্চতা $=12$ ফুট।

∴ তলগুলির ক্ষেত্রফল $=\frac{5}{3}$ ফু. $\times12$ ফু. $=20$ বর্গফুট

∴ নির্ণেয় ব্যয় $=25$ পয়সা $\times20=5$ টাকা।

Exercise 2

[প্রিজ ম্]

1. 12 সে.মি. উচ্চ একটি লম্ব প্রিজ্মের ভূমি 3 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ হইলে উহার আয়ত তলগুলির পরিমাণ কত ?

2. একটি ত্রিভুজ প্রিজ্মের ভূমির বাহুগুলি যথাক্রমে 17, 25 ও 28 সে. মিটার এবং প্রিজ্মটির উচ্চতা 20 সে. মিটার। উহার ঘনফল কত ?

3. কোন লম্ব-প্রিজ্মের ভূমি a বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ এবং উচ্চতা h হইলে, প্রমাণ কর যে উহার ঘনফল $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$.

4. একটি 8 ইঞ্চি উচ্চ লম্ব-প্রিজ্মের ভূমি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। ঐ ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটি 5 ইঞ্চি এবং অন্য বাহুটি 6 ইঞ্চি হইলে ঐ প্রিজ্মের ঘনফল ও পার্শ্বতলের পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. 1945]

5. ত্রিভুজ-ভূমিবিশিষ্ট কোন লম্ব-প্রিজ্মের ঘনফল 330 ঘনফুট এবং ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলি 5 ফু., 12 ফু. ও 13 ফুট। প্রিজ্মের উচ্চতা ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

6. সুষম সপ্তভুজভূমিবিশিষ্ট কোন লম্ব-প্রিজ্মের পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল 882 বর্গ সে. মি. এবং উচ্চতা 14 সে. মিটার। ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

7. কোন লম্ব-প্রিজ্মের ভূমি একটি ট্রাপিজিয়ম। ঐ ভূমির সমান্তরাল বাহুদ্বয় 7 সে.মি. ও 13 সে.মি. এবং ঐ বাহুদ্বয়ের লম্বদূরত্ব 8 সে. মিটার। প্রিজ্মের উচ্চতা 10 সে. মি. হইলে উহার ঘনফল কত ?

8. কোন লম্ব-প্রিজ্মের ভূমি 3 ফুট বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়ভুজ এবং উচ্চতা 18 ফুট। উহার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল কত ? [র. মি. এ.]

9. একটি লম্ব-প্রিজ্মের উচ্চতা $5\sqrt{3}$ ফুট এবং ভূমি 6 ফুট বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজ। উহার ঘনফল কত ?

[পিরামিড]

10. একটি সুষম চতুস্তলকের (tetrahedron) বাহু a হইলে প্রমাণ কর যে উহার উচ্চতা $\frac{1}{3}\sqrt{6}a$ এবং ঘনফল $\frac{1}{6\sqrt{2}}a^3$ হইবে।

11. কোন পিরামিডের ভূমি একটি ত্রিভুজ এবং উহার উচ্চতা 12 সেন্টিমিটার। ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলি 8 সে. মি., 15 সে. মি. ও 17 সে. মি. হইলে পিরামিডের ঘনফল নির্ণয় কর। [C. U. 1946, 1948]

12. 16 সেন্টিমিটার বর্গ ভূমিবিশিষ্ট একটি লম্ব পিরামিডের উচ্চতা 15 সে. মি.। উহার তির্যক তলগুলির ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল কত?

13. একটি 12 ফুট উচ্চ পিরামিডের ভূমিটি $10' \times 15'$ আয়তনের আয়তক্ষেত্র। উহার ঘনফল কত?

14. 6 সে. মিটার বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়ভুজের উপর দণ্ডায়মান কোন লম্ব পিরামিডের উচ্চতা 10 সে. মিটার। উহার ঘনফল কত?

15. 10 ফুট উচ্চ একটি উল্লম্ব স্তম্ভের ভূমি 6 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম নবভুজ। প্রতি বর্গফুট 2 শিলিং হিসাবে উহার লম্ব তলগুলিকে চিত্রিত করিতে কত ব্যয় হইবে?

16. একটি লম্ব-প্রিজ্‌মের প্রান্ততলগুলি (ends) 3 ইঞ্চিবর্গ এবং উহার উচ্চতা এক ফুট হইলে উহার তল পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. '36]

17. একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয় 16 ফুট, 11 ফুট ও 9 ফুট। উহার উপর দণ্ডায়মান $10\sqrt{7}$ ফুট পিরামিডের ঘনফল কত? [C. U. 1941]

18. একটি চতুস্তলকের (tetrahedron) তল চারিটি সর্বসম সমবাহু ত্রিভুজ। ঐ ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু 4 ফুট হইলে তলগুলির ক্ষেত্রফল এবং চতুস্তলকটির ঘনফল কত হইবে? [C. U. 1938]

19. 10 সেন্টিমিটার উচ্চ একটি লম্ব-প্রিজ্‌মের ভূমি 17 সে. মি., 10 সে. মি. ও 9 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ। উহার ঘনফল এবং সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [C. U. 1940]

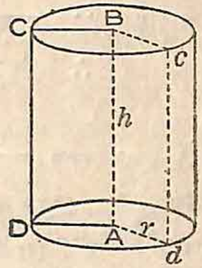
20. একটি লম্ব পিরামিডের ভূমি 12 সে. মিটার বর্গ এবং ঘনফল 576 ঘন সে. মি. হইলে উহার উচ্চতা কত?

৮। বৃত্তাকার চোঙ (Circular cylinder)

কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুকে অক্ষ (axis) করিয়া আয়তক্ষেত্রটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে লম্ব **বৃত্তাকার চোঙ** (Right circular cylinder) বলে।

ইহার উদাহরণস্বরূপ বার্লির কৌটা, ড্রাম, গোটা পেন্সিল, উপর্যুপরি স্থাপিত টাকার স্তূপ প্রভৃতি ধরা যাইতে পারে।

ABCD আয়তক্ষেত্রটির AB বাহুকে স্থির রাখিয়া বা অক্ষ ধরিয়া ঘুরাইলে CD ঘুরিয়া আসিয়া একটি বক্রতল-বিশিষ্ট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ উৎপন্ন করিবে। এইজন্য CDকে উৎপাদক রেখা (generating line) এবং ABকে অক্ষ বলা হয়। C এবং D যথাক্রমে B এবং A হইতে সর্বদাই সমদূরবর্তী থাকিবে। অতএব, ইহারা দুইটি সমান্তরাল বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। এই দুই বৃত্তকে প্রান্ততল বা ভূমি (ends) বলে। সুতরাং লম্ব বৃত্তাকার চোঙের প্রান্ততলদ্বয় দুইটি বৃত্ত। AB এই দুই তলের উপর লম্ব। AB রেখাকে ইহার উচ্চতা বলে। চোঙটি যে তলের উপর দণ্ডায়মান থাকে তাহাকে চোঙটির ভূমি বলে।



চিত্র নং 13

কোন লম্ব বৃত্তাকার-চোঙের উচ্চতা h এবং ইহার ভূমির ব্যাসার্ধ r হইলে

(ক) চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি × উচ্চতা $= 2\pi rh$ বর্গএকক।

(খ) সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + প্রান্ত দুইটির ক্ষেত্রফল
$=(2\pi rh+2\pi r^2)$ বর্গ একক ($\because$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$)
$=2\pi r(h+r)$ বর্গ একক।

(গ) চোঙের ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা $=\pi r^2 h$ ঘন একক।

উদাহরণমালা 3

[$\pi=\frac{22}{7}$ ধরা হইবে]

উদা. 1. একটি লম্ব চোঙের উচ্চতা 1 মি. 4 ডেসি মি. এবং ভূমির ব্যাস 5 মিটার। উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত?

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=2\pi rh$;

এখানে $r=$ ব্যাসার্ধ $=\frac{1}{2}$ ব্যাস $=\frac{5}{2}$ মি., h (উচ্চতা) $=1$ মি. 4 ডেসি মি. $=\frac{7}{5}$ মি.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=2\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{2}$ মি. $\times\frac{7}{5}$ মি. $=22$ বর্গ মিটার।

উদা. 2. একটি চোঙাকার স্তম্ভের উচ্চতা 9 মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 1·75 মিটার। উহার সমগ্রতলের পরিমাণ কত?

এখানে ব্যাসার্ধ $=1{\cdot}75$ মি. $=\frac{7}{4}$ মি.; উচ্চতা $=9$ মিটার।

∴ স্তম্ভটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=2\pi rh$

$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{4}$ মি.$\times 9=99$ বর্গমিটার।

আবার, ∵ বৃত্তের কালি $=\pi r^2$,

∴ ইহার বৃত্তাকার প্রান্ততল দুইটির ক্ষেত্রফল $=2\pi r^2$

$=2\times\frac{22}{7}\times(\frac{7}{4})^2$ বর্গ মি. $=19\frac{1}{4}$ বর্গ মি.

∴ সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=(99+19\frac{1}{4})$ বর্গ মি. $=118$ বর্গ মি. 25 বর্গ ডেসি মি.।

উদা. 3. কোন চোঙাকার স্তম্ভের উচ্চতা 8 মিটার এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল 2464 বর্গমিটার হইলে উহার ভূমির ব্যাসার্ধ কত?

চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=2\pi rh$.

এখানে প্রদত্ত ক্ষেত্রফল $=2464$ বর্গমিটার এবং উচ্চতা $h=8$ মি.

∴ $2\pi rh=2464$ বর্গ মিটার ($r=$ ব্যাসার্ধ)

বা, $2\times\frac{22}{7}\times 8$ মিটার $\times r=2464$ বর্গ মিটার

∴ $r=\frac{2464\times 7}{2\times 22\times 8}$ মি. $=49$ মিটার, ∴ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=49$ মিটার।

উদা. 4. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 16 মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $3\frac{1}{2}$ মিটার হইলে উহার ঘনফল কত?

চোঙটির ঘনফল $=$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা $=\pi r^2 h$.

এখানে $r=3\frac{1}{2}$ মিটার, $h=16$ মিটার।

∴ নির্ণেয় ঘনফল $=\frac{22}{7}\times(\frac{7}{2})^2\times 16$ ঘন মি. $=616$ ঘন মিটার।

উদা. 5. একটি চোঙাকার স্তম্ভের ভূমির ব্যাস 7 মিটার এবং উচ্চতা 12 মিটার। প্রতি ঘন মিটার $2\frac{1}{3}$ টাকা হিসাবে উহার নির্মাণ খরচ কত হইয়াছিল?

এখানে $r=\frac{7}{2}$ মিটার, $h=12$ মিটার।

∴ স্তম্ভের ঘনফল $=\pi r^2 h=\frac{22}{7}\times(\frac{7}{2})^2\times 12$ ঘন মি. $=22\times 7\times 3$ ঘন মি.

প্রতি ঘন মিটারের খরচ $=2\frac{1}{3}$ টাকা $=\frac{7}{3}$ টাকা,

∴ নির্ণেয় নির্মাণ খরচ $=\frac{22\times 7\times 3\times 7}{3}$ টা. $=1078$ টাকা।

উদা. 6. একটি লৌহ নলের ভিতরের ব্যাস 3 ইঞ্চি, দৈর্ঘ্য 20 ফুট এবং লৌহপাতটি $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু। এক ঘন ইঞ্চি পাতের ওজন 4·526 আউন্স হইলে ঐ নলটির ওজন কত?

[কৃ. আ. সা.]

নলটির দৈর্ঘ্য 20 ফুট $=240$ ইঞ্চি।

নলটির ভিতরের ব্যাসার্ধ $\frac{3}{2}$ ইঞ্চি, লৌহপাতটি $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু বলিয়া নলটির বাহির পর্যন্ত ব্যাসার্ধ হইবে $(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})$ বা 2 ইঞ্চি।

∴ নলটি নিরেট হইলে উহার গোলাকার প্রান্তের ক্ষেত্রফল হইত

$\frac{22}{7}\times 2^2$ বর্গ ই. $=\frac{88}{7}$ বর্গ ই. এবং

উহার ফাঁপা ভিতরের গোলাকার প্রান্তের ক্ষেত্রফল $=\frac{22}{7}\times(\frac{3}{2})^2$ ব. ই. $=\frac{99}{14}$ ব.ই.

∴ লৌহ পাতটির ঘনফল $=(\frac{88}{7}-\frac{99}{14})$ বর্গ ই. × দৈর্ঘ্য

$=\frac{11}{2}$ বর্গ ই. × 240 ই. = 1320 ঘন ইঞ্চি।

এক ঘন ইঞ্চি লৌহপাতের ওজন = 4·526 আউন্স,

∴ নির্ণেয় ওজন = 4·526 আউন্স × 1320 $=\frac{4\cdot526\times1320}{16}$ পাউণ্ড

= 373·395 পাউণ্ড।

উদা. 7. একটি চোঙের বক্রতল 1000 বর্গ সেন্টিমিটার এবং ভূমির ব্যাস 20 সেন্টিমিটার। উহার আয়তন কত? আসন্ন মিলিমিটার পর্যন্ত উহার উচ্চতা নির্ণয় কর। [$\pi=3\cdot1416$] [C. U. 1934]

চোঙটির ভূমির পরিধি $=2\pi r=20\pi$ সে. মিটার

[∵ $2r$ (ব্যাস) = 20 সে. মি.]

∴ নির্ণেয় চোঙের উচ্চতা $=(1000\div20\pi)$ সে. মি. $=\frac{50}{\pi}$ সে. মি.

$=\frac{50}{3\cdot1416}$ সে. মি. ($\pi=3\cdot1416$ ধরিয়া) = 15 সে. মি. 9 মিলি মি. (আসন্ন)।

আবার, চোঙটির ঘনফল $=\pi r^2h=\pi\times(10)^2\times\frac{50}{\pi}$ ঘন সে. মি.

= 5000 ঘন সেন্টিমিটার।

উদা. 8. একটি পুরু ফাঁপা চোঙাকার নলের দৈর্ঘ্য 6 ইঞ্চি এবং ইহার সমগ্রতল (ভিতর ও বাহিরের বক্রতলগুলি এবং প্রান্ততলদ্বয়) 308 বর্গ ইঞ্চি। যদি নলটির বাহির দিকের ব্যাস 8 ইঞ্চি হয় এবং ইহা যে ধাতুতে নির্মিত তাহার প্রতি ঘন ইঞ্চির ওজন 4 আউন্স হয়, তবে ঐ নলটির ওজন কত? [$\pi=\frac{22}{7}$] [H. S. '60]

মনে কর, নলটি x ইঞ্চি পুরু।

∵ ইহার বাহির পর্যন্ত ব্যাসার্ধ 4 ইঞ্চি,

∴ ইহার ভিতরের ব্যাসার্ধ $=(4-x)$ ইঞ্চি।

∵ শর্তানুসারে বাহির ও ভিতরের বক্রতলের এবং প্রান্ততলদ্বয়ের মোট ক্ষেত্রফল = 308 বর্গ ইঞ্চি,

∴ $2\pi\times4\times6+2\pi(4-x)\times6+2\{\pi.4^2-\pi(4-x)^2\}=308,$

বা, $2\pi(24+24-6x)+2\pi(16-16+8x-x^2)=308$.

বা, $2\pi(48-6x+8x-x^2)=308$,

বা, $\frac{44}{7}(48+2x-x^2)=308$, বা, $48+2x-x^2=\frac{308\times7}{44}=49$,

বা, $x^2-2x+1=0$, বা, $(x-1)^2=0$, $\therefore$ $x=1$.

$\therefore$ নলটির ভিতরের ব্যাসার্ধ $=(4-1)$ ই. $=3$ ইঞ্চি।

$\therefore$ নলটির ধাতুর ঘনফল $=(\pi\times4^2\times6-\pi\times3^2\times6)$ ঘন ই.

$=\frac{22}{7}\times6(4^2-3^2)$ ঘন ই. $=\frac{22}{7}\times6\times7$ ঘন ই. $=132$ ঘন ইঞ্চি,

$\therefore$ নলটির নির্ণেয় ওজন $=4$ আউন্স $\times132=\frac{4\times132}{16}$ পা. $=33$ পাউণ্ড।

Exercise 3

[$\pi=\frac{22}{7}$ ধরিবে]

1. একটি ফাঁপা চোঙের দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং ভূমির ব্যাস 7 মিটার হইলে উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

2. একটি চোঙাকার স্তম্ভের ভূমির পরিধি 4 ফু. 7ই. এবং উচ্চতা 12 গজ। উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

3. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 4 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3 ফুট। চোঙটির ঘনফল ও বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [C. U. '39]

4. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের প্রান্তীয় ব্যাস 2 মি. 8 ডেসি মি.। উহার প্রান্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফল কত ?

5. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 12 সে. মিটার এবং ভূমির ব্যাস 7 সে. মিটার ; উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. একটির চোঙাকার স্তম্ভের উচ্চতা 14 মিটার এবং উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ মিটার ; উহার ভূমির ব্যাসার্ধ কত ?

7. একটি লম্ব বৃত্তাকার চিমনির উচ্চতা 30 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 1 ফুট 2 ইঞ্চি। প্রতি বর্গফুট $\frac{1}{8}$ টাকা হিসাবে বক্রতলটি রং করিতে কত ব্যয় হইবে ?

8. একটি 15 মিটার উচ্চ স্তম্ভের বক্রতলটি রং করিতে 41 টাকা 25 পয়সা ব্যয় হইল। প্রতি বর্গফুটে 25 পয়সা ব্যয় হইলে উহার ভূমির ব্যাসার্ধ কত?

9. 14 মিটার উচ্চ একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাস 6 মিটার ; উহার ঘনফল কত ?

10. 1 ডেকা মি. 4 মি. উচ্চ একটি চোঙাকার স্তম্ভের ঘনফল 539 ঘন মিটার হইলে, উহার ভূমির ব্যাস কত ?

11. একটি চোঙাকার স্তম্ভের ভূমির ব্যাস 4 মিটার এবং স্তম্ভের উচ্চতা 21 মিটার। প্রতি ঘনমিটারে 1·6 টাকা হিসাবে উহা নির্মাণ করিতে কত ব্যয় হইবে ?

12. এক ঘন ইঞ্চি স্বর্ণ হইতে 1000 গজ দীর্ঘ একটি সরু তার প্রস্তুত করা হইল। এক ইঞ্চির আসন্ন সহস্রাংশ পর্যন্ত ঐ তারের ব্যাস নির্ণয় কর। [C. U. '58]

13. কোন ফাঁপা বৃত্তাকার চোঙের ভূমির বাহিরের ও ভিতরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 14 সে. মি. ও 7 সে. মি. ; উহার একটি প্রান্তের ক্ষেত্রফল কত ?

14. এক ইঞ্চি পুরু লৌহপাতে নির্মিত কোন ফাঁপা নলের দৈর্ঘ্য 9 ফুট এবং ভিতরের ব্যাস 3 ইঞ্চি। এক ঘন ইঞ্চি পাতের ওজন $\frac{1}{4}$ পাউণ্ড হইলে ঐ নলের ওজন কত ? [রু. আ. সা.]

15. 11 ঘন সে. মিটার লৌহকে পিটিয়া 56 সে. মি. লম্বা একটি তার নির্মাণ করা হইল। ঐ তারের প্রান্তীয় ব্যাসার্ধ কত ?

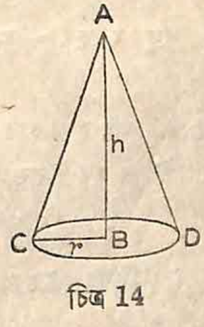
16. 9 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি ফাঁপা নলের বাহির দিক পর্যন্ত ব্যাসার্ধ 10 ইঞ্চি। উহা 2 ইঞ্চি পুরু লৌহ দ্বারা নির্মাণ করিতে কত ঘন ইঞ্চি লৌহ লাগিয়াছিল ?

[রু. আ. সা.]

৯। শঙ্কু (Cone)

সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের একটি বাহুকে অক্ষ ধরিয়া ত্রিভুজটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু (right circular cone) বলে।

ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠B সমকোণ। ABকে অক্ষ ধরিয়া ত্রিভুজটিকে ঘোরান হইলে C বিন্দু একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। এই বৃত্তকে শঙ্কুর ভূমি (base) বলে। বৃত্তের ব্যাসার্ধ BC, A বিন্দু শঙ্কুর শীর্ষ এবং ∠CAD ইহার শিরঃকোণ। AB, শঙ্কুর ভূমির উপর লম্ব। ABকে শঙ্কুর উচ্চতা এবং AC বা ADকে ইহার তির্যক উচ্চতা (slant height) বলে।



চিত্র 14

মোচার অগ্রভাগ, লিখিবার জন্য কাটা পেন্সিলের অগ্রভাগ শঙ্কুর দৃষ্টান্ত।

কোন লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা h এবং ইহার ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং তির্যক উচ্চতা l হইলে—

(ক) **শঙ্কুর বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল**

$=\frac{1}{2}$ ভূমির পরিধি $\times$ তির্যক উচ্চতা $=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l$

$=\pi rl$ বর্গ একক......(1)

$=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$ বর্গ একক......(2)

[$\because$ $\angle ABC=1$ সমকোণ, $\therefore$ $AC^2=AB^2+BC^2$, $\therefore$ $l^2=h^2+r^2$]

(খ) **শঙ্কুর সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল** = বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + ভূমির ক্ষেত্রফল

$=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$ বর্গ একক।

(গ) **শঙ্কুর ঘনফল** $=\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$=\frac{1}{3}\pi r^2h$ ঘন একক।

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 12 ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাস 10 ইঞ্চি। উহার (1) তির্যক উচ্চতা, (2) বক্রতল, (3) সমগ্রতল এবং (4) ঘনফল নির্ণয় কর। $(\pi=\frac{22}{7})$.

এখানে উচ্চতা $h=12$ ইঞ্চি, ব্যাসার্ধ $r=5$ ইঞ্চি

(1) $\therefore$ শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা $(l)=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{12^2+5^2}$ ই. $=13$ ই.

(2) শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi rl$ বর্গ একক $=\frac{22}{7}\times 5\times 13$ বর্গ ই.

$=\frac{1430}{7}$ বর্গ ই. $=104\frac{2}{7}$ বর্গ ইঞ্চি।

(3) শঙ্কুটির সমগ্রতল $=\pi r(l+r)$ বর্গ একক $=\frac{22}{7}\times 5(13+5)$ বর্গ ই.

$=282\frac{6}{7}$ বর্গ ইঞ্চি।

(4) শঙ্কুর ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi r^2h$ ঘন একক $=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(5)^2\times 12$ ঘন ই.

$=314\frac{2}{7}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 2. লম্ব বৃত্তাকার একটি শঙ্কুর বক্রতল 330 বর্গ ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাস 7 ইঞ্চি। উহার লম্ব উচ্চতা ও তির্যক উচ্চতা নির্ণয় কর। $(\pi=\frac{22}{7})$.

$\because$ বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi rl$,

$\therefore$ l (তির্যক উচ্চতা) $=\frac{\text{বক্রতল}}{\pi r}=\frac{330}{\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}}$ ই. $=30$ ইঞ্চি।

আবার, $\because$ $l^2=h^2+r^2$, $\therefore$ $h^2=l^2-r^2$, $\therefore$ $h=\sqrt{l^2-r^2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব উচ্চতা $=\sqrt{30^2-(\frac{7}{2})^2}$ ই. $=\frac{\sqrt{3551}}{2}$ ই. $=29\cdot79$ ইঞ্চি (প্রায়)।

উদা. 3. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ঘনফল 1232 ঘনফুট এবং উচ্চতা 24 ফুট হইলে উহার ভূমির ব্যাসার্ধ কত ? $(\pi=\frac{22}{7})$.

$\because$ $\frac{1}{3}\pi r^2 h=$ শঙ্কুর ঘনফল,

$\therefore$ এখানে $\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times r^2\times 24=1232$,

$\therefore$ $r^2=\frac{1232\times 7\times 3}{22\times 24}$ বর্গফুট $=7^2$ বর্গ ফু., $\therefore$ $r=7$ ফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=7$ ফুট।

উদা. 4. একটি শঙ্কুর আকারের তাঁবুর ভূমির ব্যাস 16 মিটার এবং উচ্চতা 15 মিটার। ঐ তাঁবুর জন্য কত বর্গমিটার ক্যানভাস বস্ত্র লাগিয়াছে ? $(\pi=\frac{22}{7})$.

$\because$ $l^2=r^2+h^2$, $\therefore$ এখানে $l^2=(8^2+15^2)$ বর্গ মিটার।

$\therefore$ $l=\sqrt{64+225}$ মি. $=\sqrt{289}$ মি $=17$ মিটার।

এক্ষণে, তাঁবুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi rl=\frac{22}{7}\times 8\times 17$ বর্গ মি. $=\frac{2992}{7}$ বর্গ মিটার

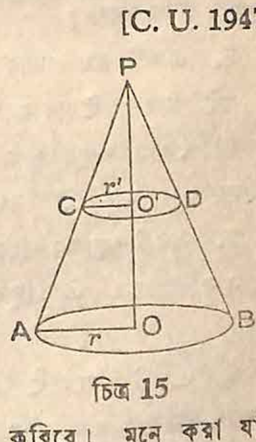
$\therefore$ নির্ণেয় বস্ত্রের পরিমাণ $=\frac{2992}{7}$ বর্গ মি. $=427\frac{3}{7}$ বর্গ মিটার।

উদা. 5. একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুদ্বয় 3 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চি। দীর্ঘতর বাহুটিকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটি ঘুরাইলে যে শঙ্কু উৎপন্ন হয় তাহার ঘনফল নির্ণয় কর। $(\pi=\frac{22}{7})$. [শি. এ.]

এখানে বুঝা গেল শঙ্কুর উচ্চতা $h=4$ ইঞ্চি, এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $=3$ ইঞ্চি।

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 3^2\times 4$ ঘন ই. $=37\frac{5}{7}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 6. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির সমান্তরাল সমতল ক্ষেত্র আঁকিয়া শঙ্কুকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন ঐ অংশদ্বয়ের বক্রতল দুইটির ক্ষেত্রফল সমান হয়। [C. U. 1947]



চিত্র 15

মনে করা যাক APB একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু, AB বৃত্ত ইহার ভূমি, O ভূমির কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধ। মনে করা যাক AP রেখার C বিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল করিয়া একটি সমতল আঁকিলে CPD শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল বাকি অংশ ACDB-এর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান হইবে, অর্থাৎ CPD শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল APB শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে। আবার, C বিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল করিয়া সমতল আঁকিলে উহা শঙ্কুকে একটি বৃত্তে ছেদ করিবে। মনে করা যাক O' এবং r' যথাক্রমে এই বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ।

এখন PCO′ এবং PAO ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ [∵ CO′ ∥ AO]

$\therefore \quad \frac{CO'}{AO}=\frac{PC}{PA}$ অর্থাৎ $\frac{r'}{r}=\frac{PC}{PA}$.

$\therefore \quad \frac{\text{CPD শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল}}{\text{APB শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল}}=\frac{\pi r' PC}{\pi r PA}$

$=\frac{r'}{r}\cdot\frac{PC}{PA}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PC}{PA}=\frac{PC^2}{PA^2}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \quad PC^2=\frac{1}{2}PA^2=PA.\frac{1}{2}PA.$

$\therefore$ PC রেখা PA এবং $\frac{1}{2}$PA-এর মধ্য-সমানুপাতী হইল।

Exercise 4

[$\pi=\frac{22}{7}$ ধরিবে]

1. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 15 ইঞ্চি ও ভূমির ব্যাস 16 ইঞ্চি। শঙ্কুটির (i) তির্যক উচ্চতা, (ii) বক্রতলের ক্ষেত্রফল, (iii) সমগ্রতল পরিমাণ এবং (iv) ঘনফল নির্ণয় কর।

2. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের পরিমাণ 704 বর্গ ইঞ্চি এবং উহার ভূমির ব্যাস 2 ফুট 4 ইঞ্চি। উহার তির্যক উচ্চতা ও লম্ব উচ্চতা কত?

3. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 1 ফুট 9 ইঞ্চি এবং বক্রতল 396 বর্গ ইঞ্চি; উহার ব্যাস নির্ণয় কর।

4. একটি শঙ্কুর ভূমির ব্যাস 7 ইঞ্চি এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল 275 বর্গ ই., শঙ্কুটির উচ্চতা কত?

5. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 12 সেন্টিমিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 5 সেন্টিমিটার। উহার ঘনফল ও বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত?

6. কোন শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ 1 ফুট 2 ইঞ্চি, উহার উচ্চতা কত হইলে বক্রতলের পরিমাণ 2200 বর্গ ইঞ্চি হইবে?

7. একটি শঙ্কু-আকারের তাঁবুর উচ্চতা $7\frac{1}{2}$ ফুট এবং উহা 200 বর্গ গজ ভূমি বেষ্টন করিয়াছে। ঐ তাঁবু প্রস্তুত করিতে কি পরিমাণ ক্যানভাস বস্ত্র লাগিয়াছে? [ব. মি. এ.]

8. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয় 7 ও 15 সে. মিটার। দীর্ঘতর বাহুটিকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটিকে ঘুরাইলে যে শঙ্কুটি উৎপন্ন হইবে তাহার ঘনফল নির্ণয় কর।

9. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 15 সেন্টিমিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ ৪ সেন্টিমিটার ; উহার বক্রতল পরিমাণ ও ঘনফল নির্ণয় কর। [C. U. 1931]

10. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ 3 ফুট এবং উচ্চতা 4 ফুট। উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল কত? [C. U. 1939]

11. একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 20 ই., 16 ই. ও 12 ইঞ্চি। ইহার অতিভুজকে অক্ষ করিয়া ইহাকে ঘুরাইলে যে শঙ্কুদ্বয় উৎপন্ন হয় তাহাদের মোট ঘনফল কত? [রু. ই.]

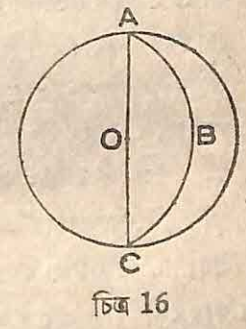
12. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 20 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 4 ফুট। উহার অক্ষের মধ্যবিন্দু দিয়া অক্ষের সহিত লম্বভাবে একটি সমতলের দ্বারা শঙ্কুটির উপরিভাগকে ছেদ করিলে ছিন্ন শঙ্কুভাগের ঘনফল কত হইবে? [C. U. '36]

13. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 12 ইঞ্চি দীর্ঘ এবং উহার অপর কোণদ্বয় 60° ও 30°. অতিভুজকে অক্ষ করিয়া উহাকে ঘুরাইলে উৎপন্ন ঘনের ঘনফল কত হইবে?

14. 5 জন লোকের স্থানের জন্য একটি শঙ্কুর আকারের তাঁবুর প্রয়োজন। যদি প্রত্যেক লোকের জন্য ভূমিতে 16 বর্গফুট স্থান এবং 100 ঘনফুট বায়ুর প্রয়োজন হয়, তবে সেই তাঁবুর উচ্চতা, তির্যক উচ্চতা ও পরিসর (width) কত হইবে? [R. U. S.]

১০। গোলক (Sphere)

কোন অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে অক্ষ করিয়া অর্ধবৃত্তটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে গোলক (Sphere) বলে।



চিত্র 16

এই অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধই গোলকের ব্যাসার্ধ হয়।

গোলাকার মার্বেল, খেলিবার বল প্রভৃতি গোলকের দৃষ্টান্ত।

কোন গোলকের ব্যাসার্ধ r হইলে—

(ক) গোলকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $=\pi$(ব্যাস)^2 $=4\pi r^2$ বর্গ একক, অথবা বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = উৎপাদক বৃত্তের পরিধি × ব্যাস $=2\pi r \times 2r$ বর্গ একক।

(খ) গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

উদাহরণমালা 5

উদা. 1. একটি গোলকের ব্যাস 1 ফুট 2 ইঞ্চি ; উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর। $(\pi=\frac{22}{7})$.

এখানে r (ব্যাসার্ধ) = 7 ইঞ্চি, $\therefore$ নির্ণেয় বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $=4\pi r^2$
$=4\times\frac{22}{7}\times(7)^2$ বর্গ ই. = 616 বর্গ ইঞ্চি।

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(7)^3$ ঘন ই. $=1437\frac{1}{3}$ ঘন ইঞ্চি।

উদা. 2. একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 9856 বর্গ সে. মিটার। উহার ব্যাস নির্ণয় কর। ($\pi=\frac{22}{7}$)।

$\because$ পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $=4\pi r^2$, $\therefore$ এখানে $4\times\frac{22}{7}\times r^2=9856$.

$\therefore$ $r^2=\frac{9856\times7}{4\times22}=784$, $\therefore$ $r=\sqrt{784}$ সে. মি. $=28$ সে. মি.।

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাস $=2r=56$ সে. মিটার।

উদা. 3. একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল যত বর্গ ইঞ্চি, উহার ঘনফলের পরিমাণ তত ঘন ইঞ্চি। উহার ব্যাসার্ধ কত?

মনে কর গোলকটির ব্যাসার্ধ $=r$ ইঞ্চি।

$\therefore$ ইহার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $=4\pi r^2$ বর্গ ইঞ্চি,

এবং ইহার ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন ইঞ্চি,

$\therefore$ শর্তানুসারে $\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi r^2$, বা, $\frac{r^3}{r^2}=\frac{4\pi}{\frac{4}{3}\pi}$, $\therefore$ $r=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=3$ ইঞ্চি।

উদা. 4. একটি বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা ও ব্যাস 10 মিটার। যে গোলকের পৃষ্ঠতল চোঙটির বক্রতলের সমান তাহার ব্যাসার্ধ কত?

চোঙটির ব্যাসার্ধ $=5$ মিটার।

উহার বক্রতল $=2\pi rh=2\pi\times5\times10=100\pi$ বর্গ মিটার।

আবার, গোলকের পৃষ্ঠতল $=4\pi r^2$ (rকে গোলকের ব্যাসার্ধ ধরিয়া)

$\therefore$ $4\pi r^2=100\pi$ বর্গ মি, বা, $r^2=25$ বর্গ মি., $\therefore$ $r=5$ মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=5$ মিটার।

উদা. 5. এক ইঞ্চি ব্যাসের একটি লৌহ গোলককে পিটিয়া $\frac{1}{100}$ ইঞ্চি পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হইল। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [র. মি. এ.]

গোলকের ব্যাসার্ধ $=\frac{1}{2}$ ইঞ্চি,

$\therefore$ গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{6}\pi$.

মনে কর, লৌহপাতের ব্যাসার্ধ r ইঞ্চি,

$\therefore$ উহার ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$, এবং উহা $\frac{1}{100}$ ইঞ্চি পুরু বলিয়া উহার ঘনফল $=\pi r^2\times\frac{1}{100}=\frac{\pi r^2}{100}$.

$\therefore$ $\frac{\pi r^2}{100}=\frac{\pi}{6}$, $\therefore$ $r^2=\frac{100}{6}=\frac{50}{3}$, $\therefore$ $r=\sqrt{\frac{50}{3}}=4\cdot0825$.

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=4\cdot0825$ ইঞ্চি (আসন্ন)।

উদা. 6. 11 মি. × 10 মি. × 5 মি. পরিমাণ আয়তাকার একটি সীসা-খণ্ড হইতে 5 ডেসি মি. ব্যাসের কতগুলি গোলক প্রস্তুত করা যায়? [$\pi = \frac{22}{7}$]

সীসা-খণ্ডের ঘনফল = 11 × 10 × 5 ঘন মি. = 550 ঘন মিটার।

∴ গোলকগুলির মোট ঘনফল = 550 ঘন মিটার।

একটি গোলকের ব্যাসার্ধ = $\frac{5}{2}$ ডেসি. মি. = $\frac{1}{4}$ মিটার।

∴ একটি গোলকের ঘনফল = $\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (\frac{1}{4})^3 = \frac{11}{7 \times 24}$ ঘন মিটার

∴ নির্ণেয় গোলকের সংখ্যা = (550 ঘন মি. ÷ $\frac{11}{7 \times 24}$ ঘন মি.) = 8400.

উদা. 7. কোন গোলকের ভিতরের ও বাহিরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6 সে. মি. ও 3 সে. মিটার। উহার ঘনফল কত?

এখানে গোলকটির ঘনফল হইবে যথাক্রমে 6 সে. মি. ও 3 সে. মি. ব্যাসার্ধের দুইটি এককেন্দ্রীয় গোলকের ঘনফলদ্বয়ের অন্তরের সমান।

∴ গোলকটির নির্ণেয় ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi \times (6)^3 - \frac{4}{3}\pi \times (3)^3 = \frac{4}{3}\pi(6^3 - 3^3)$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 189$ ঘন সে. মি. = 792 ঘন সেন্টিমিটার।

উদা. 8. একটি লৌহগোলকের বাহির দিকের ব্যাস এক ফুট এবং উহা 2 ইঞ্চি পুরু লৌহপাতে প্রস্তুত। এক ঘনফুট লৌহের ওজন 450 পাউণ্ড হইলে ঐ গোলকটির ওজন কত? [$\pi = \frac{22}{7}$] [শি. এ.]

গোলকটির বাহিরের ব্যাসার্ধ = 6 ইঞ্চি,

উহার ভিতরের ব্যাসার্ধ = 6 ইঞ্চি − 2 ইঞ্চি = 4 ইঞ্চি।

∴ গোলকটির ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi(6^3 - 4^3) = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 152$ ঘন ইঞ্চি

$= \frac{4 \times 22 \times 152}{3 \times 7 \times (12)^3}$ ঘনফুট।

∵ এক ঘনফুট লৌহের ওজন = 450 পাউণ্ড,

∴ নির্ণেয় ওজন $= \frac{4 \times 22 \times 152 \times 450}{3 \times 7 \times (12)^3}$ পাউণ্ড

$= \frac{10450}{63}$ পা. = 165·87 পাউণ্ড (আসন্ন)।

উদা. 9. যথাক্রমে 1 সে. মি., 6 সে. মি. ও 8 সে. মি. ব্যাসার্ধের তিনটি ভরাট স্বর্ণগোলক একত্র গলাইয়া একটি মাত্র নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। এই গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [C. U. 1956]

মনে করা যাক R নূতন গোলকের ব্যাসার্ধ।

∴ নূতন গোলকের ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi R^3$

এখন, প্রথম গোলকের ঘনফল $= \frac{4}{3}.\pi.\ 1^3$

দ্বিতীয় ,, ,, $= \frac{4}{3}\pi.6^3$

তৃতীয় ,, ,, $= \frac{4}{3}\pi.8^3$

$\therefore$ ঐ তিনটির মোট ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi(1^3+6^3+8^3)$ ঘন সে. মি.
$=\frac{4}{3}\pi(1+216+512)$ ঘন সে. মি.
$=\frac{4}{3}\pi\times729$ ঘন সে. মি.

$\therefore$ $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.729$,

$\therefore$ $R^3=729=9\times9\times9$, $\therefore$ $R=9$.

$\therefore$ নির্ণেয় নূতন গোলকের ব্যাসার্ধ $=9$ সেণ্টিমিটার।

উদা. 10. 6 ইঞ্চি ব্যাসের একটি নিরেট গোলককে 10 ইঞ্চি বহির্ব্যাস ও 4 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি নলে পরিণত করা হইল। ঐ নলটি কত ইঞ্চি পুরু ?

এখানে গোলকটির ব্যাসার্ধ 3 ইঞ্চি। মনে কর নলটি x ইঞ্চি পুরু। ইহার বহির্ব্যাসার্ধ 5 ইঞ্চি।

এক্ষণে, গোলকটির ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times3^3$ ঘন ই. $=36\pi$ ঘন ই.

এবং নলটির ঘনফল $=4\pi\{5^2-(5-x)^2\}$ ঘন ই.।

$\therefore$ $4\pi\{5^2-(5-x)^2\}=36\pi$, বা, $5^2-(5-x)^2=9$,

বা, $(5-x)^2=25-9=16$, বা, $5-x=4$, $\therefore$ $x=1$.

$\therefore$ নলটি 1 ইঞ্চি পুরু।

উদা. 11. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 9 ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাস 4 ইঞ্চি। উহাকে একটি গোলকে পরিণত করা হইল। গোলকটির পৃষ্ঠতলের পরিমাণ নির্ণয় কর। [H. S. '61 (Compl.)]

এখানে চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ 2 ইঞ্চি।

$\therefore$ ইহার ঘনফল $=\pi r^2h=\pi.2^2.9$ ঘন ই. $=36\pi$ ঘন ইঞ্চি।

মনে কর, গোলকের ব্যাসার্ধ r ইঞ্চি।

অতএব, গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3$.

$\therefore$ শর্তানুসারে $\frac{4}{3}\pi r^3=36\pi$, বা, $r^3=27$, $\therefore$ $r=3$ ইঞ্চি।

$\therefore$ গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $=4\pi r^2=4\times\frac{22}{7}\times3^2$ বর্গ ই.
$=\frac{36\times22}{7}$ বর্গ ই. $=113\frac{1}{7}$ বর্গ ইঞ্চি।

উদা. 12. দুইটি নিরেট তামার গোলকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 1 সে. মি. ও 3 সে. মিটার। উহাকে গলাইয়া 7 সে. মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ প্রস্তুত করা হইল। চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [H. S. '63 (Compl.)]

গোলকের মোট ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi(1^3+3^3)$ ঘন সে. মি.
$=\frac{4}{3}\pi\times28$ ঘন সে. মি.

মনে কর, শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ r সে. মিটার।

$\therefore$ শঙ্কুর ঘনফল $=\frac{1}{3}\pi r^2\times7$ ঘন সে. মি.

প্রদত্ত শর্তানুসারে $\frac{1}{3}\pi r^2 \times 7 = \frac{4}{3}\pi \times 28$,

বা, $\frac{7}{3}r^2 = \frac{4}{3} \times 28$, বা, $r^2 = \frac{4}{3} \times 28 \times \frac{3}{7} = 16$, $\therefore$ $r = 4$.

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $= 4$ সেন্টিমিটার।

উদা. 13. 6 সেন্টিমিটার ব্যাসের একটি গোলককে আংশিক জলপূর্ণ একটি চোঙাকার পাত্রে রাখা হইল। পাত্রটির ব্যাস 12 সে. মিটার। গোলকটি জলে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত হইলে ঐ পাত্রটির জলতল কতটা উত্থিত হইবে? [H. S. '63]

মনে কর, পাত্রটিতে গোলকটি সম্পূর্ণ নিমজ্জিত হইলে উহার জলতল পূর্বাপেক্ষা h সেন্টিমিটার অধিক উত্থিত হইবে।

অতএব, গোলকের দ্বারা অপসারিত জলের (উত্থিত জলের) ঘনফল

$= \pi r^2 h = \pi \times 6^2 \times h$ ঘন সে. মি. [$\because$ $r = \frac{1}{2} \times 12$ সে. মি. $= 6$ সে. মি.]

আবার, গোলকটির ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3^3$ ঘন সে. মি.।

$\because$ উত্থিত জলের ঘনফল গোলকের ঘনফলের সমান,

$\therefore$ $\pi . 6^2 . h = \frac{4}{3} . \pi . 3^3$, বা, $36h = 36$. $\therefore$ $h = 1$.

অতএব, জলতল 1 সেন্টিমিটার উত্থিত হইবে।

Exercise 5

[$\pi = \frac{22}{7}$ ধরিবে

1. যে গোলকের ব্যাস 5 ডেসি. মি. 6 সে. মি. তাহার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল কত?
2. একটি গোলকের ব্যাসার্ধ $3\frac{1}{2}$ ডেসি মি.; উহার পৃষ্ঠতলের পরিমাণ কত?
3. 1 ডেসি মি. 4 সে. মিটার ব্যাসের একটি গোলকের ঘনফল কত?
4. একটি গোলকের পৃষ্ঠতল 154 বর্গ সে. মি. হইলে উহার ব্যাসার্ধ কত?
5. একটি গ্লোবের পৃষ্ঠতলের পরিমাণ $\frac{11}{14}$ বর্গফুট; উহার ব্যাস কত?
6. একটি গোলকের ঘনফল $1437\frac{1}{3}$ ঘন মিটার হইলে উহার ব্যাসার্ধ কত?
7. একটি গোলকের ব্যাস 36 ইঞ্চি। উহার ঘনফল ঘনফুটে নির্ণয় কর। [P. U.]
8. একটি চোঙের ব্যাস ও উচ্চতা 6 মিটার। যে গোলকের পৃষ্ঠতল চোঙটির বক্রতলের সমান তাহার ব্যাসার্ধ কত?
9. 6 ডেসি মি. ব্যাসের একটি লৌহপিণ্ড হইতে 1 ডেসি মি. ব্যাসের কয়টি গোলা প্রস্তুত করা যায়?
10. একটি আয়তাকার লৌহফলক হইতে $\frac{1}{2}$ সে. মি. ব্যাসার্ধের কতগুলি গুলী প্রস্তুত করা যাইবে? ফলকটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 10, 8 ও $5\frac{1}{2}$ সেন্টিমিটার।

11. যথাক্রমে 3, 4 ও 5 মিলিমিটার ব্যাসার্ধের তিনটি নিরেট স্বর্ণগোলককে গলাইয়া একটি নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। ঐ গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [C. U. '44, C. Pre. U. '63]

12. একটি গোলার বাহিরের ও ভিতরের দিকের ব্যাস যথাক্রমে $15\frac{1}{2}$ ই. ও $10\frac{3}{4}$ ই., গোলার ঘনফল কত? [রু. আ. সা.]

13. 4 সে. মি. ব্যাসের একটি লৌহগোলককে পিটিয়া $\frac{2}{3}$ সে. মিটার পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হইল। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ কত?

14. একটি শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ 4 ইঞ্চি। উহার উচ্চতা কত হইলে উহার ঘনফল 4 ইঞ্চি ব্যাসের গোলকের ঘনফলের সমান হইবে? [শি. এ.]

15. দুইটি নিরেট স্বর্ণগোলকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 ও r_2; উহাদিগকে গলাইয়া একটি নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। প্রমাণ কর যে, উহার ব্যাসার্ধ $(r_1^3+r_2^3)^{\frac{1}{3}}$ এর সমান।

16. 9 ইঞ্চি ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলাতে একটি শঙ্কু প্রস্তুত করা হইল। শঙ্কুটির ভূমির ব্যাস 18 ইঞ্চি হইলে, উহার উচ্চতা কত?

17. একটি ফাঁপা লৌহগোলকের বাহিরের ব্যাস 13 ইঞ্চি এবং লৌহের বেধ 2 ইঞ্চি। ঐ গোলকটির ওজন কত? (এক ঘন ইঞ্চি লৌহের ওজন 4·2 আউন্স)। [রু. ই.]

18. ভরাট গোলাকার একটি মৃত্তিকাপিণ্ডকে 16 ইঞ্চি উচ্চ একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙে পরিণত করা হইল। যদি চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ গোলকটির ব্যাসার্ধের সমান হয়, তবে ঐ ব্যাসার্ধ কত হইবে? [C. U. '49]

19. 6 ইঞ্চি ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলকের ধাতু হইতে 6 ইঞ্চি ব্যাস ও 8 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কয়টি নিরেট চোঙ প্রস্তুত করা যায়? [B. U. E. '62 ; C. U. '52]

20. একটি ·25 ইঞ্চি ব্যাসের চোঙাকার নল দিয়া মিনিটে 20 ফুট বেগে জল প্রবেশ করিতেছে। ইহা দ্বারা কতক্ষণে একটি শঙ্কুর আকারের পাত্র জলপূর্ণ হইবে? পাত্রটির উপরিভাগের ব্যাস 10 ইঞ্চি ও গভীরতা 9 ইঞ্চি। [S. F. '62 (Compl.)]

21. সমান উচ্চতাবিশিষ্ট একটি শঙ্কু, একটি অর্ধগোলক ও একটি চোঙ সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত। দেখাও যে তাহাদের ঘনফলগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3 এবং তাহাদের সমগ্রতলগুলির তুলনা কর। [S. F. '63]

22. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির সমান্তরাল ও উহার উচ্চতাকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করিতে দুইটি সমতল দ্বারা ছিন্ন করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে ছিন্ন অংশত্রয়ের অনুপাত 1 : 7 : 19. [S. F. '63 (Compl.)]

পঞ্চম অধ্যায়

[দশম শ্রেণীর পাঠ্য]

বীজগণিত

Elimination (অপনয়ন)

1. **অপনয়ন ও অপনীতক।** অপনয়ন অর্থে বর্জন বুঝায়। কতিপয় প্রদত্ত সমীকরণ হইতে এক বা একাধিক বীজগণিতীয় রাশি অপনয়ন (eliminate) করিতে হইলে ঐ সমীকরণগুলির সাহায্যে ঐ রাশিবর্জিত একটি সমীকরণ নির্ণয় করিতে হয়।

ঐ রাশিবর্জিত যে সমীকরণটি গঠিত হয় তাহাকে **অপনীতক** (eliminant) বলা হয়।

অপনয়ন প্রণালী। মনে কর, $2x+a=0$ ও $3x+4b=0$ এই সমীকরণ দুইটি হইতে x অপনয়ন করিতে হইবে।

$$\text{এক্ষণে, } \because \ 2x+a=0, \ \therefore \ x=-\frac{a}{2} \cdots\cdots(1)$$

$$\text{আবার } \because \ 3x+4b=0 \ \therefore \ x=-\frac{4b}{3} \cdots\cdots(2)$$

$\therefore \ -\frac{a}{2}=-\frac{4b}{3}$, বা $3a-8b=0$. এই সমীকরণে x নাই (অর্থাৎ ইহা x-বর্জিত) এবং ইহা প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে গঠিত হইয়াছে, সুতরাং ইহাই এখানে অপনীতক। এই $3a-8b=0$ সমীকরণটিকে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির x-অপনীতক (x-eliminant) বলে।

সাধারণ নিয়ম। দুইটি সমীকরণ হইতে একটি রাশি (x বা y) অপনয়ন করিবার জন্য প্রথমে প্রত্যেক সমীকরণ হইতে ঐ রাশির মান নির্ণয় করিবে। এইরূপে সমীকরণ দুইটি হইতে ঐ রাশির যে দুইটি মান পাওয়া যাইবে তাহারা যদি সমান হয়, কেবল তবেই ঐ মান দ্বারা সমীকরণ দুইটি সিদ্ধ হয়। অতএব, ঐ লব্ধ মান দুইটিকে সমিত করিয়া যে সমীকরণটি পাওয়া যাইবে তাহাই ঐ সমীকরণদ্বয়ের ঐ রাশি-অপনীতক হইবে।

এখানে বুঝা গেল যে, ঐ লব্ধ অপনীতকটি প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি যুগপৎ সিদ্ধ হইবার শর্ত।

অপনয়নে সমীকরণ সংখ্যা। উপরের উদাহরণে দেখা যাইতেছে যে, একটি রাশি (x) অপনয়নের জন্য দুইটি সমীকরণ প্রয়োজন হইয়াছে। এ সম্বন্ধে সাধারণতঃ যতগুলি রাশি অপনয়ন করিতে হইবে প্রদত্ত সমীকরণের সংখ্যা তাহা অপেক্ষা এক অধিক হওয়া আবশ্যক।

একটি রাশি অপনয়নের জন্য দুইটি সমীকরণ আবশ্যক। কারণ, একটি সমীকরণ হইতে ঐ রাশির যে মান পাওয়া যায় তাহা আর একটি সমীকরণে ঐ রাশির পরিবর্তে বসাইয়া তবে ঐ রাশি-বর্জিত সমীকরণটি পাওয়া যাইবে।

অনুরূপে দুইটি রাশি অপনয়নের জন্য তিনটি সমীকরণের প্রয়োজন হয়। কারণ, এখানে যে কোন দুইটি সমীকরণ হইতে ঐ অপনেয় রাশি দুইটির যে মান পাওয়া যাইবে, তৃতীয় সমীকরণে ঐ রাশি দুইটির ঐ মান বসাইলে তবে ঐ রাশিদ্বয়-বর্জিত সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

কিন্তু যদি প্রদত্ত সমীকরণগুলি অপনেয় রাশিগুলির **সমমাত্র সমীকরণ** (homogeneous equation) হয়, তবে সমীকরণের সংখ্যা অপনেয় রাশি-সংখ্যার সমান হইলেও চলিবে।

মনে কর, $4x+my=0$ এবং $nx+3y=0$ এই সমীকরণ দুইটি হইতে x ও y অপনয়ন করিতে হইবে।

এখন দেখ, প্রদত্ত সমীকরণ দুইটিকে y দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$4\frac{x}{y}+m=0\cdots(1) \quad \text{এবং} \quad n\frac{x}{y}+3=0\cdots(2)$$

(1) হইতে $\frac{x}{y}=-\frac{m}{4}$ এবং (2) হইতে $\frac{x}{y}=-\frac{3}{n}$,

$\therefore\ -\frac{m}{4}=-\frac{3}{n}$, বা, $mn=12$.

অতএব, অপনীতকটি হইল $mn=12$.

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের উদাহরণে $\frac{x}{y}$-কে একটি মাত্র রাশি ধরিয়া উহাকে অপনীত করা হইয়াছে।]

উদাহরণমালা 1

উদা. 1. $a_1x+y_1=0$ ও $a_2x+b_2=0$ হইতে x-কে অপনয়ন কর।

$\therefore\ a_1x+b_1=0$, $\therefore\ x=-\frac{b_1}{a_1}$

আবার, $\because\ a_2x+b_2=0$, $\therefore\ x=-\frac{b_2}{a_2}$.

$\therefore\ -\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}$, $\therefore\ a_1b_2-b_1a_2=0$ হইল নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 2. $a_1x+b_1y=0$ এবং $a_2x+b_2y=0$ হইতে x ও yকে অপনীত কর।

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে y দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $a_1\frac{x}{y}+b_1=0\cdots(1)$

এবং $a_2\frac{x}{y}+b_2=0\cdots(2)$. এক্ষণে (1) হইতে পাই $\frac{x}{y}=-\frac{b_1}{a_1}$,

$\therefore$ (2)-এ $\frac{x}{y}$এর ঐ মান বসাইয়া পাই $a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_2=0$,

বা, $a_1b_2-a_2b_1=0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 3. নিম্নের সমীকরণগুলি হইতে x, y, z অপনয়ন কর।

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=0\cdots(1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=0\cdots(2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=0\cdots(3) \end{array}\right\}$$

তোমরা বজ্রগুণন প্রণালীতে সমীকরণ সমাধানের প্রণালী পূর্বে শিখিয়াছ।

এখানে (2) ও (3) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই,

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2}$$

মনে কর, প্রত্যেক অনুপাত$=k$.

$\therefore$ $x=k(b_2c_3-b_3c_2)$, $y=k(c_2a_3-c_3a_2)$, $z=k(a_2b_3-a_3b_2)$.

এক্ষণে সমীকরণ-(1)এ x, y, z-এর মান বসাইয়া পাই,

$$k\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)\}=0.$$

$\therefore$ $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

[দ্রষ্টব্য : প্রদত্ত সমীকরণগুলিকে উপরে প্রদত্ত আকারে পরিণত করিয়া লওয়া যায়।]

উদা. 4. $mx+ny=a$, $nx-my=b$, $m^2+n^2=1$ হইতে m ও nকে অপনীত কর।

প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণ দুইটির বর্গ করিয়া পাই

$$m^2x^2+n^2y^2+2mnxy=a^2\cdots(1)$$

এবং $n^2x^2+m^2y^2-2mnxy=b^2\cdots(2)$

$\therefore$ (1)+(2) করিয়া পাই $x^2(m^2+n^2)+y^2(n^2+m^2)=a^2+b^2$,

$\therefore$ অপনীতক হইল $x^2+y^2=a^2+b^2$ [$\because$ $m^2+n^2=1$]

উদা. 5. $x^2=p^2+\frac{1}{p^2}$ ও $y=p+\frac{1}{p}$ হইতে p অপনয়ন কর।

এখানে $y^2=\left(p+\frac{1}{p}\right)^2=p^2+\frac{1}{p^2}+2=x^2+2$, $\therefore y^2-x^2=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় অপনীতক হইল $y^2-x^2=2$.

উদা. 6. $ax^2+bx+c=0$ ও $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ হইতে xকে অপনীত কর।

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{x^2}{bc_1-b_1c}=\frac{x}{ca_1-c_1a}=\frac{1}{ab_1-a_1b}$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b} \text{ এবং } x=\frac{ca_1-c_1a}{ab_1-a_1b},$$

$$\therefore\quad \frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b}=\frac{(ca_1-c_1a)^2}{(ab_1-a_1b)^2}.$$

$$\therefore\quad (ca_1-c_1a)^2=\frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b}\times(ab_1-a_1b)^2$$

$=(bc_1-b_1c)(ab_1-a_1b)$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 7. নিম্নের সমীকরণ তিনটি হইতে x ও y অপনীত কর :

$x-y=a\cdots(1)$, $x^2-y^2=b^2\cdots(2)$ এবং $x^3-y^3=c^3\cdots(3)$

$\because\ x^2-y^2=b^2$, $\therefore\ (x+y)(x-y)=b^2$,

বা, $(x+y)\times a=b^2$, $\therefore\ x+y=\frac{b^2}{a}\cdots\cdots(4)$

(1) হইতে বর্গ করিয়া পাই $x^2+y^2-2xy=a^2\cdots(5)$

এবং (4) হইতে " " " $x^2+y^2+2xy=\frac{b^4}{a^2}\cdots(6)$

(6)−(5) করিয়া পাই $4xy=\frac{b^4-a^4}{a^2}$, $\therefore\ xy=\frac{b^4-a^4}{4a^2}$.

এক্ষণে (3) হইতে পাই $c^3=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$=a\{(x+y)^2-xy\}=a\left\{\frac{b^4}{a^2}-\frac{b^4-a^4}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left(\frac{3b^4+a^4}{4a^2}\right)=\frac{3b^4+a^4}{4a},$$

$\therefore\ 3b^4+a^4=4ac^3$ [বজ্রগুণন দ্বারা].

$\therefore$ নির্ণেয় অপনীতক হইল $a^4+3b^4-4ac^3=0$.

উদা. 8. $x \cos\theta + y \sin\theta = a$ এবং $x \sin\theta - y \cos\theta = b$ হইতে $\cos\theta$ ও $\sin\theta$ অপনীত কর।

$\because\ x\cos\theta + y\sin\theta = a,$

$\therefore\ x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\cos\theta\sin\theta = a^2 \cdots\cdots(1)$

আবার, $\because\ x\sin\theta - y\cos\theta = b,$

$\therefore\ x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta = b^2 \cdots\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$x^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + y^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = a^2 + b^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ($\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$), ইহাই অপনীতক।

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = p,\ \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = q,\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = r$ সমীকরণত্রয়ের অপনীতক $p^2 + q^2 + r^2 - 4 = pqr,$

প্রদত্ত সমীকরণ তিনটি গুণ করিয়া পাই

$$2 + \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \left(\frac{z^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2}\right) + \left(\frac{x^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) = pqr,$$

বা, $2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right)^2 - 2 + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 - 2 = pqr,$

বা, $2 + r^2 - 2 + p^2 - 2 + q^2 - 2 = pqr,$

$\therefore\ p^2 + q^2 + r^2 - 4 = pqr,$

অতএব প্রমাণিত হইল যে,

প্রদত্ত সমীকরণ তিনটির অপনীতক $p^2 + q^2 + r^2 - 4 = pqr.$

উদা. 10. নিম্নের সমীকরণগুলির অপনীতক নির্ণয় কর :—

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = a \cdots\cdots(1) \\ xy + yz + zx = b \cdots\cdots(2) \\ x^3 + y^3 + z^3 = c \cdots\cdots(3) \\ xyz = d \cdots\cdots(4) \end{array}\right\}$$

(3) ও (4) হইতে পাই $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = c - 3d,$

$\therefore\ (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = c - 3d,$

বা, $a\{(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)\} = c - 3d,$

বা, $a(a^2 - 3b) = c - 3d.$

$\therefore\ a^3 - 3ab + 3d - c = 0$, ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 11. $ax^2+bx+c=0\cdots(1)$ এবং $x^3+x+d=0\cdots(2)$ হইতে x অপনীত কর।

প্রথম সমীকরণকে x দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে a দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$ax^3+bx^2+cx=0\cdots(3)$$

$$ax^3+ax+ad=0\cdots(4)$$

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই $bx^2+(c-a)x-ad=0\cdots(5)$.

এক্ষণে (1) ও (5) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{x^2}{-abd-c(c-a)}=\frac{x}{bc+a^2d}=\frac{1}{a(c-a)-b^2},$$

$\therefore\ (bc+a^2d)^2=(abd+c^2-ac)(a^2+b^2-ac)$. [উদা. 6 দেখ]

Exercise 1

নিম্নের সমীকরণগুলি হইতে x অপনীত কর :—

1. $\left.\begin{array}{l}x+b=0\\3x+2a=a\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}2x-m=0\\nx-5=0\end{array}\right\}$

3. $ax+b=0,\ a'x+b'=0.$

4. $ax^2-2a^2x+1=0,\ a^2+x^2=3ax.$

5. $x^2+ax+b=0,\ x^2+cx+d=0.$

6. $x+\frac{1}{x}=a+b,\ x-\frac{1}{x}=a-b.$

7. $x^2+x+a=0,\ bx+c=0.$

8. $x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=a,\ x^3-\frac{1}{x^3}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=b.$

নিম্নের সমীকরণগুলি হইতে x ও y-এর অপনয়ন কর :—

9. $2x+ay=0,\ bx+3y=0.$

10. $x-y=a,\ x^2+y^2=b,\ xy=c.$

11. $x^2-y^2=ax-by,\ x^2+y^2=1,\ 4xy=bx+ay.$

12. $x+y=p,\ x^2+y^2=q,\ x^3+y^3=r.$

13. $x+y=m,\ x^3+y^3=n,\ xy=l.$

14. $x+y=a,\ x^2+y^2=b^2,\ x^4+y^4=c^4.$

নিম্নের সমীকরণগুলি হইতে x, y, z অপনীত কর :—

15. $ax+by+cz=0,\ a_1x+b_1y+c_1z=0,\ a_2x+b_2y+c_2z=0.$

16. $bx+ay-z=0,\ cx+az-y=0,\ cy+bz-x=0.$

17. $xy=c^2,\ yz=a^2,\ zx=b^2,\ x^2+y^2+z^2=d^2.$

18. $\frac{x}{a}=y+z,\ \ \frac{y}{b}=z+x,\ \ \frac{z}{c}=x+y.$

19. $mx-ny=a(m^2-n^2),\ \ nx+my=2amn,\ \ m^2+n^2=1$ হইতে m ও n অপনীত কর।

20. দেখাও যে, $x^2+y^2=cxy,\ \ y^2+z^2=ayz,\ \ z^2+x^2=bzx$-এর অপনীতক $a^2+b^2+c^2-abc=4.$

Progression (প্রগতি)

2. **শ্রেণী।** যদি কোন রাশিমালার অন্তর্গত পর পর রাশি বা পদগুলি এরূপ হয় যে, উহাদের যে কোনও একটিকে উহার পরবর্তী পদ হইতে কোন একটি নির্দিষ্ট নিয়মে পাওয়া যায়, তাহা হইলে সেই রাশিমালাকে **শ্রেণী** (series) বলে। যথা, 3, 5, 7, 9···প্রভৃতি রাশি, অথবা 3, 6, 12, 24···প্রভৃতি রাশি এক একটি শ্রেণী গঠন করিয়াছে।

সমান্তর শ্রেণী (Arithmetical Progression)

3. **সমান্তর শ্রেণী।** যদি কোন শ্রেণী এরূপ হয় যে, উহার অন্তর্গত যে কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অন্তর সর্বদা সমান থাকে, তবে সেই শ্রেণীকে **সমান্তর শ্রেণী** (A. P.) বলে।

আর ঐ সমান অন্তরটিকে **সাধারণ অন্তর** (common difference) বলে। যথা, (i) 1, 3, 5, 7···একটি সমান্তর শ্রেণী ; কারণ ইহার পর পর পদগুলি ঠিক একই ভাবে বাড়িয়া গিয়াছে, এক্ষেত্রে সাধারণ অন্তর 2.

(ii) 10, 7, 4, 1···ইহাও একটি সমান্তর শ্রেণী ; কারণ, ইহার পর পর পদগুলি ঠিক একই ভাবে কমিয়া গিয়াছে। এস্থলে সাধারণ অন্তর −3.

4. **সাধারণ অন্তর নির্ণয়।** সমান্তর শ্রেণীর যে কোন পদ হইতে তাহার ঠিক পূর্বের পদটি বিয়োগ করিলে সাধারণ অন্তর পাওয়া যায়। সাধারণতঃ দ্বিতীয় পদ হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করা হয়। যথা,

(1) 2, 6, 10, 14···শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর $=6-2=4$

(2) 7, 4, 1, −2···শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর $=4-7=-3$

(3) $a, a+b, a+2b\cdots$শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর$=(a+b)-a=b$,

(4) $a, a-b, a-2b\cdots$শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর$=(a-b)-a=-b$.

5. সাধারণ পদ, শেষ পদ ও পদসংখ্যা। মনে কর, 4, 6, 8, 10, 12, 14 একটি সমান্তর শ্রেণী, ইহার শেষ পদ$=14$, পদসংখ্যা$=6$; এস্থলে 14কে ষষ্ঠ পদও বলা যায়। এইরূপ যদি কোন সমান্তর শ্রেণীতে কতকগুলি পদ থাকে, তবে তাহার সপ্তম, দশম প্রভৃতি পদকে বিশেষ পদ বলে। আর ঐ শ্রেণীর n-তম পদকে (nth term) সাধারণ পদ (general term) বলে।

এস্থলে যদি n-তম পদে শ্রেণীটি শেষ হয়, তবে n-তম পদই শেষ পদ (last term) হইবে এবং পদসংখ্যা হইবে n. এই n একটি পূর্ণসংখ্যা ও ধনসংখ্যা হইবে, ইহা কখনও ভগ্নাংশ বা কোন ঋণসংখ্যা হইবে না।

সাধারণতঃ সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদকে a, সাধারণ অন্তরকে b, শেষ পদকে l, পদসংখ্যাকে n এবং পদগুলির যোগফলকে s দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার t_1 দ্বারা প্রথম পদ, t_2 দ্বারা দ্বিতীয় পদ, t_3 দ্বারা তৃতীয় পদ,$\cdots$, t_n দ্বারা n-তম পদকে নির্দেশ করা যায়।

6. সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয়। কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b হইলে।

t_1 (প্রথম পদ) $=a=a+(1-1)b$,
t_2 (দ্বিতীয় পদ) $=a+b=a+(2-1)b$,
t_3 (তৃতীয় পদ) $=a+2b=a+(3-1)b$,
t_4 (চতুর্থ পদ) $=a+3b=a+(4-1)b$ ইত্যাদি।

এক্ষেত্রে দেখা যাইতেছে যে, যে-কোন পদে b-এর সহগ হইবে সেই পদসংখ্যা অপেক্ষা এক কম। প্রথম পদ a-এর সহিত ঐরূপ সহগযুক্ত b যোগ করিলেই যে কোন পদ পাওয়া যায়।

অতএব, যে কোন সমান্তর শ্রেণীর $\boldsymbol{t_n=a+(n-1)b}$.

ঐ শ্রেণীতে যদি মোট n-সংখ্যক পদ থাকে, তবে t_n হইবে শেষ পদ, তখন $l=a+(n-1)b$.

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. 6, 8, 10,$\cdots$এই শ্রেণীর 15-তম পদ কত?

এস্থলে প্রথম পদ $a=6$, সাধারণ অন্তর $b=8-6=2$, পদসংখ্যা $n=15$,

$t_n=a+(n-1)b$ এই সূত্র হইতে পাই,

$t_{15}=6+(15-1)\times 2=6+28=34$.

উদা. 2. 10, 7, 4…এই শ্রেণীর 20-তম পদ নির্ণয় কর।

এখানে প্রথম পদ $a=10$, সাধারণ অন্তর $b=7-10=-3$,

পদসংখ্যা $n=20$.

$\therefore\ t_{20}=a+(n-1)b=10+(20-1)\times-3=10+19\times-3$
$=10-57=-47$.

উদা. 3. যে সমান্তর শ্রেণীর সপ্তম ও 13-তম পদ যথাক্রমে 23 ও 41 তাহার 21-তম পদ কত?

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

এখানে $t_7=23$ অর্থাৎ $a+6b=23\cdots(1)$

এবং $t_{13}=41$ অর্থাৎ $a+12b=41\cdots(2)$

এক্ষণে, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই $6b=18$, $\therefore\ b=3$.

আবার, (1) হইতে পাই $a+18=23$, $\therefore\ a=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় $t_{21}=a+20b=5+20\times3=5+60=65$.

উদা. 4. 2, 5, 8,…এই শ্রেণীর কোন্ পদ 59?

মনে কর, 59 ঐ শ্রেণীটির n-তম পদ। এখানে $a=2$, $b=5-2=3$,

$\therefore\ a+(n-1)b=59$,

বা, $2+(n-1)\times3=59$, বা, $3(n-1)=57$,

বা, $n-1=19$, $\therefore\ n=20$. অতএব শ্রেণীটির 20-তম পদ 59.

উদা. 5. কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম ও q-তম পদ যথাক্রমে q ও p; উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ শর্ত হইতে পাই, $a+(p-1)b=q\cdots(1)$

এবং $a+(q-1)b=p\cdots(2)$

$\therefore$ [বিয়োগ করিয়া] $(p-q)b=q-p$,

$$\therefore\ b=\frac{q-p}{p-q}=-1.$$

এখন, (1) হইতে পাই, $a+(p-1)\times-1=q$, বা, $a-p+1=q$

$\therefore\ a=p+q-1$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রথম পদ $=p+q-1$ এবং সাধারণ অন্তর $=-1$.

উদা. 6. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং শেষ পদ l; প্রমাণ কর যে, শ্রেণীটির গোড়া হইতে p-তম এবং শেষ হইতে পূর্বের p-তম পদদ্বয়ের সমষ্টি $a+l$.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, এবং সাধারণ অন্তর $=q$.

$\therefore$ গোড়ার দিক হইতে p-তম পদ $=a+(p-1)q$.

এবং শেষ দিক হইতে পূর্বের p-তম পদ $=l-(p-1)q$.

$\therefore$ এই দুই পদের সমষ্টি $=a+(p-1)q+l-(p-1)q=a+l$.

দ্রষ্টব্য : গোড়ার দিক হইতে পদগুলি যে ভাবে বাড়িয়া গিয়াছে, শেষ দিক হইতে বামদিকে ঠিক সেইভাবে কমিয়া গিয়াছে। $\therefore$ যদি গোড়ার দিক হইতে কোন পদ $a+rd$ হয়, শেষ দিক হইতে ঐ সংখ্যক পদ $l-rd$ হইবে।]

Exercise 2

1. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 6 এবং সাধারণ অন্তর 2 ; উহার 15-তম পদটি কত? [C. U. '22]

2. যে সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 1 এবং দশম পদ 10, তাহার সাধারণ অন্তর কত? [C. U. '25]

3. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 2 এবং 20-তম পদ 59 ; উহার সাধারণ অন্তর কত? [C. U. '24]

4. এমন একটি সমান্তর শ্রেণী নির্ণয় কর যাহার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d.

5. এমন একটি সমান্তর শ্রেণী নির্ণয় কর যাহার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর -3.

6. 16, 13, 10,$\cdots$ শ্রেণীর 15-তম পদ কত?

7. 2, 5, 8,$\cdots$ শ্রেণীটির 12-তম ও r-তম পদ নির্ণয় কর।

8. 8, 6, 4,$\cdots$ শ্রেণীটির 20-তম ও n-তম পদ কত?

9. $1+\frac{5}{4}+1\frac{1}{2}+\cdots$ শ্রেণীটির দশম পদ কত?

10. (i) $a, \left(a+\frac{1}{n}\right), \left(a+\frac{2}{n}\right)$, এবং

(ii) $\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{2n+1}{n}\cdots$ এই শ্রেণী দুইটির n-তম পদ নির্ণয় কর।

[C. U. 1886]

11. 6, 10, 14,$\cdots$ শ্রেণীটির কোন্ পদ 38?

12. 10, 8, 6,…শ্রেণীর কোন্ কোন্ পদ যথাক্রমে 0 ও −10 ?

13. 3, 6, 9,…শ্রেণীটির কোন পদ 29 হইতে পারে কি ?

14. $\frac{3}{5}$, 1, $\frac{7}{5}$,…শ্রেণীর কোন পদ $6\frac{3}{5}$ হইতে পারে কি ?

15. কোন সমান্তর শ্রেণীর দ্বিতীয় পদ 6 ও চতুর্থ পদ 14 হইলে উহার দশম পদ কত ? [C. U. '29]

16. যে সমান্তর শ্রেণীর পঞ্চম ও 12-তম পদ যথাক্রমে −4 ও −25, তাহার 20-তম পদ কত ?

17. যে সমান্তর শ্রেণীর পঞ্চম ও 13-তম পদ যথাক্রমে 5 ও −3, তাহার প্রথম ও দশম পদ নির্ণয় কর।

18. কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ $3p-1$; শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

19. কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম ও q-তম পদ যথাক্রমে c ও d হইলে উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর কত হইবে ? [C. U. '34]

20. কোন সমান্তর শ্রেণীর m-তম পদ n এবং n-তম পদ m ; উহার $(m+n)$-তম পদ কত ?

21. যে সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ a এবং q-তম পদ b, তাহার r-তম পদ নির্ণয় কর।

22. প্রমাণ কর যে, সমান্তর শ্রেণীর দুই প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সমষ্টি ধ্রুবক।

23. কোন্ সমান্তর শ্রেণীর পঞ্চম ও 12-তম পদ যথাক্রমে 8 ও −6 ?

24. কোন সমান্তর শ্রেণীর m-তম পদ n এবং n-তম পদ m, উহার p-তম পদ নির্ণয় কর। [C. U. '47 ; E. B. S. B. '51]

সমান্তরীয় মধ্যক (Arithmetic Mean)

7. **সমান্তরীয় মধ্যক।** (1) যদি তিনটি রাশি সমান্তর শ্রেণীতে থাকে, তবে মধ্যপদটিকে সমান্তরীয় মধ্যক বলে। যথা : a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইলে b-কে a ও c-র সমান্তরীয় মধ্যক বলে। (2) যদি কতকগুলি পদ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যে ততগুলি সমান্তরীয় মধ্যক বলা হয়। যথা : $a, m_1, m_2, m_3, \cdots m_n, b$ একটি সমান্তরীয় শ্রেণী হইলে $m_1, m_2, \cdots, m_n$ পদগুলিকে a ও b-এর মধ্যবর্তী n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক বলে।

(3) সমান্তরীয় মধ্যককে সংক্ষেপে ইংরাজীতে A. M. লেখা যায়।

উদাহরণমালা 3

উদা. 1. a ও b-এর মধ্যে সমান্তরীয় মধ্যকটি নির্ণয় কর। [C. U. '48]

মনে কর, সমান্তরীয় মধ্যকটি m, $\therefore$ a, m, b একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore$ $m-a=b-m$ (উভয়পক্ষ সাধারণ অন্তরের সমান বলিয়া)

বা, $2m=a+b$, $\therefore$ $m=\frac{a+b}{2}$.

[দ্রষ্টব্য : যে কোন দুইটি পদের সমষ্টির অর্ধেক, ঐ পদদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যক হইবে।]

উদা. 2. a ও b-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

$\because$ a ও b-র মধ্যে n-সংখ্যক মধ্যক আছে,

$\therefore$ a ও b-এর মধ্যবর্তী n মধ্যকগুলি লইয়া এমন একটি সমান্তর শ্রেণী হইল যাহার পদসংখ্যা $=n+2$, প্রথম পদ a, এবং শেষ পদ বা $(n+2)$-তম পদ $=b$.

মনে কর, সাধারণ অন্তর $=d$.

$\because$ $(n+2)$-তম পদ $=b$. $\therefore$ $a+(n+2-1)d=b$,

বা, $a+(n+1)d=b$ বা, $(n+1)d=b-a$, $\therefore$ $d=\frac{b-a}{n+1}$.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=(a+\frac{b-a}{n+1})$, $(a+2\frac{b-a}{n+1})$,

$$(a+3.\tfrac{b-a}{n+1}), \cdots, (a+n.\tfrac{b-a}{n+1}).$$

[দ্রষ্টব্য : এখানে মধ্যে আছে n-সংখ্যক মধ্যক এবং তাহাদের আগে আছে a ও শেষে আছে b, সেইজন্য মোট পদসংখ্যা $n+2$ হইল। প্রথম পদের সঙ্গে সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া দ্বিতীয় পদ অর্থাৎ প্রথম মধ্যক পাওয়া গেল; এইবার সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া পর পর অন্য মধ্যকগুলি পাওয়া যাইবে। শেষ মধ্যক হইল $a+n.\frac{b-a}{n+1}$ ইহা $b-d$ বা $b-\frac{b-a}{n+1}$ এরূপও প্রয়োজন মত লেখা যায়।]

উদা. 3. 2 ও 57-এর মধ্যে 10টি সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

[C. U. '19 ; D. B. '28]

2 এবং 57-এর মধ্যে 10টি মধ্যক হইলে মোট 12টি পদযুক্ত একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে। উহার প্রথম পদ 2 এবং দ্বাদশ পদ 57.

মনে কর, সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ $t_{12}=57$, বা, $2+11b=57$, বা, $11b=55$, $\therefore$ $b=5$.

$\therefore$ প্রথম মধ্যক $=2+5=7$, দ্বিতীয় মধ্যক $=7+5=12$.

এইরূপে নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52$.

উদা. 4. 4 ও 31-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে। উহাদের মধ্যে দ্বিতীয় মধ্যক : শেষ মধ্যক $=5:14$ হইলে n কত ?

4 ও 31-এর মধ্যে n-সংখ্যক মধ্যক লইয়া মোট $(n+2)$ সংখ্যক-পদযুক্ত সমান্তর শ্রেণী হইল। উহার প্রথম পদ 4 এবং $(n+2)$-তম পদ 31.

মনে কর, সাধারণ অন্তর b.

$\therefore\ t_{n+2}=4+(n+2-1)b=31,$

বা, $(n+1)b=27\cdots\cdots(1)$

আবার, $\because$ b সাধারণ অন্তর,

$\therefore$ দ্বিতীয় মধ্যক $=4+2b$ এবং শেষ মধ্যক $=31-b$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে $\dfrac{4+2b}{31-b}=\dfrac{5}{14}$,

বা, $28b+56=155-5b$, বা, $33b=99$, $\therefore\ b=3$.

এক্ষণে (1) হইতে পাই, $(n+1).3=27$, বা, $n+1=9$, $\therefore\ n=8$.

Exercise 3

উভয়ের মধ্যে সমান্তরীয় মধ্যকটি নির্ণয় কর :

1. 7 ও 23. 2. -5 ও 13. 3. -4 এবং -14,

4. $(x-a)^2$ এবং $(x+a)^2$. 5. $2\frac{1}{4}$ ও $3\frac{1}{2}$. 6. $\frac{m+n}{m-n}$ ও $\frac{m-n}{m+n}$.

7. 1 ও 41-এর মধ্যে 7টি সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর। [C. U. '14]

8. 4 এবং 324-এর মধ্যে 4টি সমান্তরীয় মধ্যক বসাও। [C. U. 1890]

9. 2 ও 23-এর মধ্যে এরূপ n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে যে প্রথম মধ্যক : শেষ মধ্যক $=1:4$; n-এর মান নির্ণয় কর।

10. 14 ও 38-এর মধ্যে n সমান্তরীয় মধ্যক আছে এবং দ্বিতীয় মধ্যক : শেষ মধ্যক $=4:7$; n-এর মান কত ?

8. সমান্তর শ্রেণীর যে-কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়।

উদা. 1. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর দেওয়া আছে ; ঐ শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. '30, '33, '37, '41, '43, '44, '45 ; D. B. '34, '38, '43 ; G. U. '49]

মনে কর, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর b ; উহার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, উহার যোগফল S এবং শেষ পদ l.

অতএব, $S=a+(a+b)+(a+2b)+\cdots+(l-2b)+(l-b)+l$

শ্রেণীটি উল্টাইয়া লিখিলে,

$S=l+(l-b)+(l-2b)+\cdots+(a+2b)+(a+b)+a$

যোগ করিয়া $2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)$

$=(a+l)+(a+l)+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$=n(a+l)$.

$\therefore\ S=\frac{n}{2}(a+l)\cdots(1)$

এক্ষণে, $\because$ l শেষ পদ বা n-তম পদ, $\therefore\ l=a+(n-1)b$.

$\therefore$ (1) হইতে l-এর মান বসাইয়া পাই $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}\cdots(2)$

[দ্রষ্টব্য : কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ পদ জানা থাকিলে সূত্র-(1) এবং অন্যস্থলে সূত্র (2)-এর সাহায্যে যোগফল নির্ণয় করিবে।

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. $3+7+11+\cdots$ সমান্তর শ্রেণীর 21 পদের যোগফল কত?

এস্থলে প্রথম পদ $a=3$, সাধারণ অন্তর $b=7-3=4$ এবং পদসংখ্যা $n=21$, মনে কর, যোগফল S.

$\therefore\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=\frac{21}{2}\{3\times2+(21-1)\times4\}=\frac{21}{2}\times86=903.$

উদা. 2. $3+5+7+\cdots$ইহার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

এখানে $a=3$, $b=5-3=2$. মনে কর, সমষ্টি$=S$.

$\therefore\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$

$=\frac{n}{2}\{2\times3+(n-1)\times2\}=\frac{n}{2}(2n+4)=n^2+2n.$

উদা. 3. $5+7+9+\cdots+65$ এই শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় কর।

এস্থলে $a=5$, $b=7-5=2$.

মনে কর, পদসংখ্যা$=n$, সুতরাং n-তম পদ বা শেষ পদ$=65$,

$\therefore\ a+(n-1)b=65$, বা, $5+(n-1)\times2=65$,

বা, $2(n-1)=60$, বা, $n-1=30$, $\therefore\ n=31$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল$=\frac{31}{2}(5+65)=\frac{31}{2}\times70=1085.$

উদা. 4. কোন্ সমান্তর শ্রেণীর প্রথম n পদের সমষ্টি $(2n+1)(2n-1)$ হয়?

মনে কর, n-সংখ্যক পদের যোগফল S_n.

$\therefore\ S_n=(2n+1)(2n-1)=4n^2-1$;

এখন যদি n-এর স্থানে 1, 2, 3 প্রভৃতি বসাই তাহা হইলে S_1 অর্থাৎ প্রথম একটি পদের যোগফল, S_2 অর্থাৎ প্রথম দুইটি পদের যোগফল, ইত্যাদি পাইব।

$\therefore \quad S_1 = 4.1^2 - 1 = 3,\ S_2 = 4.2^2 - 1 = 15,\ S_3 = 4.3^2 - 1 = 35.$

আবার $t_1 = S_1 = 3$ [$\because$ প্রথম একটি পদের যোগফল ও প্রথম পদ একই]

এবং $t_2 = S_2 - S_1 = 15 - 3 = 12$ [কারণ, প্রথম দুই পদের সমষ্টি হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করিলে দ্বিতীয় পদের সমান হয়।]

অনুরূপে $\quad t_3 = S_3 - S_2 = 35 - 15 = 20$

এবং $t_4 = S_4 - S_3 = 63 - 35 = 28.$

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণী $= 3, 12, 20, 28, \cdots\cdots$ইহার প্রথম পদটি বাদে বাকি পদগুলি সমান্তর শ্রেণী (A. P.) হইবে।

[দ্রষ্টব্য : এইরূপ ক্ষেত্রে অন্ততঃ 4টি পদ নির্ণয় করিয়া তবে উত্তর স্থির করিবে।]

উদা. 5. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+3+5+\cdots$এর 40 পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর। [C. U. '21]

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b = 3-1 = 2$, এবং $t_1 = a = 1.$

$t_2 = a + 1.b = 1 + 1.2 = 3, \quad t_3 = a + 2.b = 1 + 2.2 = 5.$

$\therefore$ স্পষ্টতঃ $t_{40} = a + 39b = 1 + 39.2 = 79$; মনে কর, যোগফলটি $= s.$

এক্ষণে, $\quad s = 1 + 3 + 5 + \cdots + 75 + 77 + 79$

এবং $\quad s = 79 + 77 + 75 + \cdots + 5 + 3 + 1$ (উল্টাইয়া লিখিলে)

$\therefore \quad 2s = 80 + 80 + 80 + \cdots$ 40-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $= 80 \times 40.$

$\therefore \quad s = \frac{80 \times 40}{2} = 1600.$

উদা. 6. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+3+5+7+\cdots$শ্রেণীটির প্রথম n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. '36, '38, '39 Sup. ; D. B. '27]

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b = 3-1 = 2$ এবং $t_1 = 1,$

$t_2 = 1 + 1.2 = 3,\ t_3 = 1 + 2.2 = 5,\ t_4 = 1 + 3.2 = 7,$

অনুরূপে $t_n = 1 + (n-1).2 = 2n - 1.$ মনে কর, সমষ্টি $= s.$

এক্ষণে, $\quad s = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1)$

আবার, $\quad s = (2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + \cdots + 5 + 3 + 1$

(যোগ করিয়া) $2s = 2n + 2n + 2n + \cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $= 2n \times n = 2n^2,$

$\therefore \quad s = n^2.$

উদা. 7. $3+4+8+9+13+14+18+19+\cdots$, ইহার 20টি পদের সমষ্টি কত? [C. U. 1881]

এস্থলে দুইটি সমান্তর শ্রেণী মিশিয়া আছে। যথা, $(3+8+13+\cdots)$ এবং $(4+9+14+\cdots)$; প্রত্যেক শ্রেণীতে পদসংখ্যা $=10$.

$\therefore\ s=(3+8+13+\cdots 10$ পদ পর্যন্ত$)+(4+9+14+\cdots 10$ পদ পর্যন্ত$)$

$=\frac{10}{2}\{6+9\times5\}+\frac{10}{2}\{8+9\times5\}=5\times51+5\times53=520.$

উদা. 8. $3+5+7+\cdots$ শ্রেণীটির কতগুলি পদের যোগফল 624 হইবে? [C. U. '39 Sup.]

মনে কর, n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 624. এখানে $a=3,\ b=5-3=2.$

$\because\ \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=s,\qquad \therefore\ \frac{n}{2}\{2\times3+(n-1)\times2\}=624,$

বা, $\frac{n}{2}(2n+4)=624,\qquad$ বা, $n^2+2n=624,$

বা, $n^2+2n-624=0,\qquad$ বা, $(n+26)(n-24)=0.$

$\therefore\ n=-26$ বা $24,$

$\because$ পদসংখ্যা ঋণরাশি হইতে পারে না, $\therefore\ -26$ গ্রহণযোগ্য নহে।

$\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=24$ (উত্তর)।

[দ্রষ্টব্য : $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$ এই সূত্রের $a,\ b,\ n$ ও S এই চারিটি রাশির যে কোন তিনটি জানা থাকিলে ঐ সূত্র-সাহায্যে চতুর্থ রাশিটি নির্ণয় করা যায়।]

উদা. 9. একটি সমান্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টি 40, সাধারণ অন্তর 2 এবং শেষপদ 13 হইলে n-এর মান কত? [C. U. '46 ; Pat U. '18]

এখানে n-তম পদই শেষ পদ।

$\therefore\ a+(n-1)b=13,\quad$ বা, $a+(n-1)\times2=13$

$\therefore\ a=13-2n+2=15-2n$

আবার, $\because\ \frac{n}{2}(a+l)=S,$

$\therefore\ \frac{n}{2}(15-2n+13)=40$ [$a,\ l,\ S$-এর মান বসাইয়া]

বা, $-n^2+14n-40=0,\quad$ বা, $n^2-14n+40=0,$

বা, $(n-4)(n-10)=0,\qquad \therefore\ n=4,$ বা, $10.$

[দ্রষ্টব্য : $\because$ শেষ পদ 13 এবং সাধারণ অন্তর 2, $\therefore$ পদসংখ্যা $n=4$ হইলে, প্রথম পদ হইবে 7 ; আর $n=10$ হইলে, প্রথম পদ হইবে -5 এবং তখন প্রথম ছয়টি পদের সমষ্টি শূন্য হইবে। $\therefore$ দুইটি উত্তরই সম্ভব।]

উদা. 10. পর পর 21টি অযুগ্ম সংখ্যার শেষটি 51 হইলে উহাদের সমষ্টি কত?

এখানে শ্রেণীর শেষপদ 51 এবং সাধারণ অন্তর 2, সুতরাং শ্রেণীটি উল্টাইয়া লিখিলে $51+49+47+\cdots$এই শ্রেণী হইবে।

ইহার সাধারণ অন্তর $=-2$ এবং $n=21$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{21}{2}\{2\times 51+(21-1)\times -2\}$
$=\frac{21}{2}(102-40)=\frac{21}{2}\times 62=651.$

উদা. 11. কোন সমান্তর শ্রেণীর 18-তম পদ 39 হইলে উহার প্রথম 35টি পদের সমষ্টি কত?

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b.

$\therefore\ t_{18}=a+(18-1)b=a+17b.\quad \therefore\ a+17b=39$ (স্বীকার)।

এক্ষণে, $S_{35}=\frac{35}{2}\{2a+(35-1)b\}=\frac{35}{2}\{2a+34b\}$
$=35(a+17b)=35\times 39=1365.$

উদা. 12. কোন সমান্তর শ্রেণীর 10টি পদের সমষ্টি 120 এবং 15টি পদের সমষ্টি 255; উহার n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b,

$\because\ S_{10}=120,\quad \therefore\ \frac{10}{2}\{2a+(10-1)b\}=120,$

বা, $5(2a+9b)=120,\quad \therefore\ 2a+9b=24\cdots(1)$

আবার, $\because\ S_{15}=255,\quad \therefore\ \frac{15}{2}(2a+14b)=255,$

বা, $2a+14b=34\cdots(2)$

এখন, (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $a=3,\ b=2$.

$\therefore\ S_n=\frac{n}{2}\{2\times 3+(n-1)\times 2\}=\frac{n}{2}(2n+4)=n(n+2).$

উদা. 13. কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের কোণগুলি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিয়াছে। যদি ক্ষুদ্রতম কোণটি 88° এবং কোণগুলির সাধারণ অন্তর 10° হয়, তবে ক্ষেত্রটির বাহুসংখ্যা কত? [D. B. '46]

মনে কর, বাহুসংখ্যা $=n$. এস্থলে $a=88^\circ,\ b=10^\circ$.

$\because$ কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $+4$ সমকোণ
$=$ বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ,

$\therefore\ \frac{n}{2}\{2\times 88^\circ+(n-1)\,10^\circ\}+360^\circ=2.n.90^\circ,$

বা, $88n+5n^2-5n+360=180n,$

বা, $5n^2-97n+360=0,$ বা, $5n^2-72n-25n+360=0,$

বা, $(n-5)(5n-72)=0.\quad \therefore\ n=5$ বা $\frac{72}{5}$.

$\because$ বাহুসংখ্যা ভগ্নাংশ হইতে পারে না, $\therefore$ নির্ণেয় বাহুসংখ্যা $=5$.

Exercise 4

সমষ্টি নির্ণয় কর :—

1. $1+3+5+7+\cdots$10টি পদের [C. U. '23]
2. $5+8+11+\cdots n$ পদের
3. $14+10+6+\cdots$12টি পদের
4. $-14-11-8-\cdots$20টি পদের
5. $1+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}+\cdots$19টি পদের
6. $1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots n$ পদের
7. $12+12{\cdot}6+13{\cdot}2+\cdots$21টি পদের
8. $1+5+9+\cdots(n-1)$ পদের
9. $n+(n-1)+(n-2)+\cdots$, $(n+2)$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত
10. $\sqrt{2}+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})+\cdots$19 পদের
11. $2+5+8+\cdots+152.$ [C. U. '48]
12. $9+7+5+\cdots+(-25).$

কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া সমষ্টি নির্ণয় কর :—

13. 1, 3, 5, 7,⋯30টি পদের [C. U. '16]
14. $4+7+10+\cdots$112টি পদের [D. B. '44]
15. $5+8+11+\cdots$51টি পদের [E. B. S. B. '51]
16. $3+7+11+\cdots n$ পদের
17. $1+4+7+10+\cdots+37.$ [C. U. '19]

18. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর। [C. U. '10, '19 ; D. B. '28]

19. 320 ও 442-এর মধ্যবর্তী 7-এর সমস্ত গুণিতকগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

20. 100 ও 200-র মধ্যবর্তী অযুগ্ম সংখ্যাগুলির যোগফল কত?

21. যে 30টি পর পর অযুগ্মসংখ্যার শেষ পদ 127 তাহাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

22. কোন সমান্তর শ্রেণীর চতুর্থ ও 12-তম পদ যথাক্রমে 13 ও 57 হইলে উহার প্রথম 21টি পদের সমষ্টি কত?

23. 10, 8, 6,⋯এই শ্রেণীটির দশম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া 16টি পদ যোগ কর।

24. কোন সমান্তর শ্রেণীর 21-তম পদ 43 ; উহার 41টি পদের সমষ্টি কত?

25. 2, 8, 14,...শ্রেণীটির কতগুলি পদ যোগ করিলে 352 হইবে? [C. U. '49]

26. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদ $1\frac{1}{2}$ ও $2\frac{1}{2}$; উহার কয়টি পদের সমষ্টি 171 হইবে ? [D. B. '40]

27. $1+4+6+9+11+14+\cdots$ইহার 21টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

28. কোন সমান্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টি n^2 ; উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর। [G. U. '48]

29. কোন সমান্তর শ্রেণীর r পদের যোগফল $2r^2+3r$ হইলে শ্রেণীটি কি হইবে ?

30. $21+19+17+\cdots$শ্রেণীটির কতিপয় পদের সমষ্টি 120 ; ঐ পদগুলির সংখ্যা ও শেষ পদটি নির্ণয় কর। [D. B. '47]

31. কোন সমান্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টি $\frac{n(4n^2-1)}{3}$ হইলে উহার r-তম পদ কত ?

32. কোন সমান্তর শ্রেণীর 9টি পদের সমষ্টি 171 এবং 24টি পদের সমষ্টি 996 হইলে, উহার 41 পদের সমষ্টি কত হইবে ?

33. একটি সমান্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টি m এবং m পদের সমষ্টি n হইলে, প্রমাণ কর যে উহার $m+n$ পদের সমষ্টি হইবে $-(m+n)$। [C. U. '50]

34. প্রমাণ কর যে, 8, 16, 24,⋯শ্রেণীটির যে-কোন সংখ্যক পদের সমষ্টির সহিত 1 যোগ করিলে যোগফল একটি অযুগ্ম সংখ্যার বর্গ হইবে।

35. যে শ্রেণীর n-তম পদ $2n-1$ তাহার n পদের সমষ্টি কত ? [D. B. '46]

36. a এবং c-র মধ্যবর্তী n সমান্তরীয় মধ্যকগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

37. প্রমাণ কর যে, দুইটি পদের মধ্যবর্তী n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যকের সমষ্টি ঐ পদদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যকটির n গুণের সমান।

38. এক ব্যক্তি এই শর্তে 1000 টাকা ধার করিল যে, সে মাসিক কিস্তিতে উহা পরিশোধ করিবে। যদি প্রথম কিস্তিতে 64 টাকা দেয় এবং পর পর কিস্তিগুলি ক্রমশঃ 2 টাকা কম হয়, তবে কত মাসে ঐ দেনা শোধ হইবে ? [C. U. '20]

39. যদি কোন বহুভুজের কোণগুলি সমান্তর শ্রেণী হয় এবং ক্ষুদ্রতম কোণটি 120° ও সাধারণ অন্তর 5° হয়, তবে বহুভুজটির বাহুসংখ্যা কত ?

40. একটি ঋজু পথের উপর পর পর 5 গজ ব্যবধানে 100টি প্রস্তরখণ্ড আছে এবং প্রথম প্রস্তরখণ্ডের 5 গজ পিছনে একটি ঝুড়ি আছে। এক ব্যক্তি ঐ স্থান হইতে দৌড়াইয়া প্রস্তরগুলি এক একটি করিয়া আনিয়া ঝুড়িতে রাখিলে তাহাকে মোট কত গজ দৌড়াইতে হইবে ? [Pat. U. '19]

41. এক ব্যক্তি 162 মাইল ভ্রমণ করিবে। সে প্রথম দিন 30 মা., দ্বিতীয় দিন 27 মা., তৃতীয় দিন 24 মা., এই হারে ভ্রমণ করিলে কতদিনে তাহার ভ্রমণ সম্পূর্ণ হইবে? [D. B. '24]

42. একটি বৃক্ষ প্রতি বৎসরে পূর্ব বৎসর অপেক্ষা 1 ইঞ্চি কম বাড়ে। যদি উহা প্রথম বৎসরে 1 গজ বাড়িয়া থাকে, তবে এইভাবে কত বৎসরে উহার বৃদ্ধি বন্ধ হইবে এবং তখন উহার উচ্চতা কত হইবে?

43. এক ব্যক্তি মাসিক কিস্তিতে 65 টাকার ঋণ পরিশোধ করিবার জন্য প্রথম মাসে 2 টাকা দিল এবং ক্রমশঃ প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ এক টাকা করিয়া বাড়াইতে থাকিল। এইভাবে কত মাসে ঐ ঋণ পরিশোধ হইবে? [C. U. '30, '50]

44. চারিটি সমান্তর সংখ্যার মধ্যে প্রান্তীয় সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 11 এবং মধ্যকদ্বয়ের গুণফল $29\frac{1}{4}$; ঐ সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [D. B. '35]

45. 750 ও 1000-এর মধ্যবর্তী 13-এর গুণিতকগুলির সমষ্টি কত? [C. U. '35]

46. যোগফলের সূত্রটির সাহায্য না লইয়া $39+37+35+\cdots+3$ এই শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

47. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ, শেষ পদ ও সমষ্টি যথাক্রমে 9, 96 ও 1575; উহার সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর। [D. B. '32]

48. প্রমাণ কর যে 4, 12, 20, 28,$\cdots$ শ্রেণীটির n পদের সমষ্টি একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ। [C. U. '27, '39]

49. $10+8+6+\cdots$ শ্রেণীটির n পদের সমষ্টি 28 হইলে n-এর মান কত? ঐ মান দুইটি হইতে পারে কেন বুঝাইয়া দাও।

50. দুইজন পথিক একই সময়ে একই পথে চলিতে আরম্ভ করিল। প্রথম ব্যক্তি প্রত্যহ সমহারে 10 মাইল করিয়া চলিল এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি প্রথম দিন 8 মাইল চলিয়া পরে প্রত্যহ $\frac{1}{2}$ মাইল করিয়া গতিপথ বাড়াইতে লাগিল। শেষোক্ত ব্যক্তি কতদিনে প্রথম ব্যক্তিকে ধরিবে? [Pat. U. '20]

9. স্বাভাবিক সংখ্যা সম্বন্ধীয় যোগফল

1, 2, 3, 4,$\cdots$ প্রভৃতি সংখ্যাগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যা (natural numbers) বলে। প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যা (First n natural numbers) বলিলে 1, 2, 3,$\cdots$,n এইগুলি বুঝাইবে।

I. প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $b=1$ এবং পদসংখ্যা$=n$.

$$\therefore \text{ সমষ্টি } S=1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(1+n)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

[ইহা মুখস্থ রাখিও]

II. প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

[C. U. '15 ; D. B. '32, '34, '45 ; G. U. '51]

মনে কর, যোগফল s, সুতরাং $s=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

এক্ষণে, $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$, [Identically, অর্থাৎ n-এর মান যাহাই হউক না কেন, উভয়পক্ষ সর্বদা সমান।]

এখন ঐ অভেদের n-এর স্থলে পর পর 1, 2, 3,⋯, n পর্যন্ত লিখিয়া পাই

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1$$
$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1$$
$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n^3-(n-1)^3=3.n^2-3.n+1$$

(যোগ করিয়া) $n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$
$$-3(1+2+3+\cdots+n)+n,$$

বা, $n^3=3s-\dfrac{3n(n+1)}{2}+n,$

বা, $3s=n^3+\dfrac{3n(n+1)}{2}-n=\dfrac{2n^3+3n(n+1)-2n}{2}$

$$=\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore \quad s=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$ [ইহা মুখস্থ রাখিবে]

[দ্রষ্টব্য : উপরে যোগ করিবার সময় বামপক্ষের সব পদ কাটিয়া গিয়া কেবল n^3 অবশিষ্ট আছে। ডানপক্ষে 3কে common লইয়া রাখা হইয়াছে। $1+1+1+\cdots$ এর n পদ যোগ করিয়া যোগফল n হয় ; কারণ, 5টি 1 যোগ করিয়া যেমন 5 হয়, সেইরূপে n-সংখ্যক এক যোগ করিয়া n হইল।]

III. প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ত্রিঘাতগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. '18]

মনে কর, যোগফল s, সুতরাং $s=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

n-এর মান যাহাই হউক না কেন,

$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$ [অভেদে সমান]

এক্ষণে n-এর স্থানে পর পর 1, 2, 3,⋯, n পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n^4-(n-1)^4=4.n^3-6.n^2+4.n-1$$

(যোগ করিয়া) $n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$

$$-6(1^2+2^2+\cdots+n^2)+4(1+2+3+\cdots+n)-n$$

বা, $n^4=4s-\dfrac{6n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{4n(n+1)}{2}-n$

$$\therefore\quad 4s=n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$$
$$=n^4+n+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$=n(n+1)(n^2-n+1)+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$=n(n+1)(n^2-n+1+2n+1-2)$$
$$=n(n+1)(n^2+n)=n(n+1)n(n+1)=n^2(n+1)^2$$
$$\therefore\quad s=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

[**দ্রষ্টব্য :** I ও III লক্ষ্য করিয়া দেখ, III-এর যোগফল I-এর যোগফলের বর্গ। সুতরাং ইহা মনে রাখা সহজ।

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$]

এই সূত্রগুলির প্রয়োগে বিবিধ সমান্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা যাইবে। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণমালা 5

উদা. 1. যে শ্রেণীর n-তম পদ $n(n-1)$ তাহার n পদের সমষ্টি কত ?

মনে কর, সমষ্টি s. এখানে $t_n=n(n-1)=n^2-n$.

এক্ষণে $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=1^2-1$$
$$t_2=2^2-2$$
$$t_3=3^2-3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^2-n$$

(যোগ করিয়া) $s=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}=\frac{2n(n+1)(n-1)}{6}=\frac{n(n^2-1)}{3}.$$

উদা. 2. $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots$ইহার n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[C. U. '12, '17, '39 ; Sup. '44, '51 ; D. B. '26, '33, '41, '44]

এস্থলে প্রত্যেক পদের ন্যায় n-তম পদটিও দুইটি উৎপাদক লইয়া গঠিত। প্রদত্ত শ্রেণীর পদগুলির প্রথম উৎপাদকগুলি $1, 2, 3,\cdots$এইভাবে হইয়াছে এবং দ্বিতীয় উৎপাদকগুলি $2, 3, 4,\cdots$এইভাবে হইয়াছে।

$\therefore$ ইহার $t_n=(1, 2, 3,\cdots$এর n-তম পদ$)$ $(2, 3, 4,\cdots$এর n-তম পদ$)$

$=n(n+1)=n^2+n.$ এক্ষণে $n=1, 2, 3,\cdots n$ বসাইয়া পাই,

$$t_1=1^2+1$$
$$t_2=2^2+2$$
$$t_3=3^2+3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^2+n$$

(যোগফল) $s=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\frac{2n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

[দ্রষ্টব্য : এরূপ স্থলে প্রথমে n-তম পদ নির্ণয় করিয়া n-এর স্থানে $1, 2, 3,\cdots$ প্রভৃতি লিখিয়া যোগফল নির্ণয় করিতে হয়। অঙ্ক দেখিয়া n-তম পদ নির্ণয়ের উপায় স্থির করিতে হয়। প্রত্যেক পদে দুই বা তিনটি উৎপাদক থাকিলে উদা. 1এ প্রদর্শিত প্রণালী অবলম্বন করিবে।]

উদা. 3. $1^2+3^2+5^2+\cdots n$ পদ পর্যন্ত যোগ কর। [C. U. '50]

এস্থলে $t_n=1+3+5+\cdots$ এই শ্রেণীর n-তম পদের বর্গ

$$=\{1+(n-1)\times 2\}^2=(2n-1)^2=4n^2-4n+1.$$

এক্ষণে $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=4.1^2-4.1+1$$
$$t_2=4.2^2-4.2+1$$
$$t_3=4.3^2-4.3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=4n^2-4.n+1$$

(যোগ) $s=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-4(1+2+\cdots+n)+n$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{2n(n+1)(2n+1)-6n(n+1)+3n}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

উদা. 4. $1+4+8+13+19+26+\cdots n$ পদ পর্যন্ত যোগ কর।

মনে কর, যোগফল s এবং n-তম পদ t_n.

অতএব, $s=1+4+8+13+19+26+\cdots+t_n$

আবার, $s=\quad 1+4+8+13+19+\cdots+t_{n-1}+t_n$

[একপদ করিয়া সরাইয়া লিখিয়া]

(বিয়োগ করিয়া) $0=1+3+4+5+6+7+\cdots+(t_n-t_{n-1})-t_n$

$\therefore\quad t_n=1+3+4+5+6+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত [পক্ষান্তর করিয়া]

$=1+\{3+4+5+6+\cdots(n-1)$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $\}$

$$=1+\frac{n-1}{2}\{6+(n-2)\times 1\}=\frac{n^2+3n-2}{2}=\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{3}{2}n-1.$$

এখন $n=1, 2, 3, \cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.1^2+\tfrac{3}{2}.1-1$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.2^2+\tfrac{3}{2}.2-1$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}.3^2+\tfrac{3}{2}.3-1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{3}{2}n-1$$

(যোগ করিয়া) $s=\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{3}{2}(1+2+\cdots\cdots+n)-n$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{3n(n+1)}{4}-n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+9n(n+1)-12n}{12}$$

$$=\frac{2n(n^2+6n-1)}{12}=\frac{n(n^2+6n-1)}{6}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** এস্থলে দেখ অন্য প্রণালীতে t_n স্থির করিতে হইল। এখানে দেখা গেল যে পর পর পদগুলির অন্তরফলগুলি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে। তাই এক পদ করিয়া সরাইয়া লিখিয়া বিয়োগ করিয়া t_n নির্ণয় করা হইল। এখানে আরও দেখ t যে শ্রেণীর সমান তাহার প্রথম পদটি অর্থাৎ 1টি বাদে অন্য পদগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত বলিয়া বাকী পদগুলির সংখ্যা n অপেক্ষা 1 কম অর্থাৎ $n-1$ ধরা হইল; কারণ একটি পদ অর্থাৎ 1 বাদ গিয়াছে।

উদা. 5. $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\cdots$, শ্রেণীটির n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে $t_n=(1, 2, 3, \cdots$এর n-তম পদ$)\times(3, 4, 5, \cdots$এর n-তম পদের বর্গ$)$

$$=n(n+2)^2=n^3+4n^2+4n.$$

এক্ষণে $n=1, 2, 3, \cdots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=1^3+4.1^2+4.1$$
$$t_2=2^3+4.2^2+4.2$$
$$t_3=3^3+4.3^2+4.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=n^3+4.n^2+4.n$$

$$\therefore\ s=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+4(1^2+2^2+\cdots+n^2)+4(1+2+\cdots+n)$$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{4}\right\}^2+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}+2n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2(2n+1)}{3}+2\right\}$$

$$=\frac{n}{12}(n+1)(3n^2+19n+32).$$

উদা. 6. $(1)+(1+2)+(1+2+3)+\cdots$শ্রেণীর n পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে $t_n=(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

এক্ষণে $n=1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.1^2+\tfrac{1}{2}.1$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.2^2+\tfrac{1}{2}.2$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}.3^2+\tfrac{1}{2}.3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}.n^2+\tfrac{1}{2}.n$$

(যোগ) $\therefore \quad s=\tfrac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\tfrac{1}{2}(1+2+\cdots+n)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}=n(n+1)\left(\frac{2n+1}{12}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

উদা. 7. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots$, ইহার n পদ পর্যন্ত সমষ্টি কত?

এস্থলে $t_n=\dfrac{1}{(1, 2, 3, \cdots \text{এর } n\text{-তম পদ})\times(2, 3, 4, \cdots \text{এর } n\text{-তম পদ})}$

$$=\frac{1}{n(n+1)}.$$

এক্ষণে, $t_1=\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$

$$t_2=\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$t_3=\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

যোগ করিয়া $s=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$

10. সমান্তর শ্রেণীসংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদাহরণমালা 6

উদা. 1. সমান্তর শ্রেণীভুক্ত পর পর 3টি সংখ্যার সমষ্টি 27 এবং গুণফল 693. সংখ্যা 3টি নির্ণয় কর।

মনে কর, সংখ্যাগুলি $a-b, a, a+b$

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $a-b+a+a+b=27 \cdots (1)$

এবং $(a-b).a.(a+b)=693 \ldots (2)$

এক্ষণে (1) হইতে পাই $3a=27, \quad \therefore \quad a=9.$

(2) হইতে পাই $a(a^2-b^2)=693$, বা, $9(81-b^2)=693$,

বা, $81-b^2=77$, বা, $b^2=4 \quad \therefore \quad b=\pm 2.$

অতএব, $b=2$ ধরিয়া পদগুলি হইবে $(9-2)$, 9 ও $(9+2)$ অর্থাৎ 7, 9, 11 ;

এবং $b=-2$ ধরিয়া পদগুলি হইবে $9-(-2)$, 9, $9-2$ অর্থাৎ 11, 9, 7.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাত্রয় = 7, 9, 11 অথবা 11, 9, 7.

উদা. 2. 4টি সমান্তর সংখ্যা আছে। উহাদের প্রান্তিক সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 10 এবং মধ্যক সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল 24 হইলে, সংখ্যাগুলি কত ? [C. U. '43]

মনে কর, সংখ্যাগুলি $a-3b$, $a-b$, $a+b$, $a+3b$ [সাধারণ অন্তর $2b$]

অতএব প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই

$$a-3b+a+3b=10\cdots(1) \text{ এবং } (a-b)(a+b)=24\cdots(2)$$

এক্ষণে (1) হইতে $2a=10, \quad \therefore \quad a=5.$

(2) হইতে $a^2-b^2=24$, বা, $25-b^2=24$, বা, $b^2=1.$

$\therefore \quad b=\pm 1,$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলি $=(5-3),(5-1),(5+1)$ ও $(5+3)$,

অথবা $(5+3),(5+1),(5-1)$ ও $(5-3)$

= 2, 4, 6, 8 ; অথবা 8, 6, 4, 2.

[**দ্রষ্টব্য :** (1) পদসংখ্যা যদি অযুগ্ম হয়, তবে মধ্যপদটি a এবং সাধারণ অন্তর b ধরিতে হয়। (2) পদসংখ্যা যুগ্ম হইলে মধ্যে পর পর $a-b$, $a+b$ দুইটি পদ ধরিয়া সাধারণ অন্তর $2b$ ধরিবে।]

উদা. 3. 69কে এরূপ তিনটি অংশে বিভক্ত কর যেন অংশগুলি সমান্তর শ্রেণী হয় এবং তাহাদের প্রথম দুইটির গুণফল যেন 483 হয়।

মনে কর, অংশত্রয় যথাক্রমে $a-b$, a, $a+b$.

$$\therefore \quad a-b+a+a+b=69\cdots(1) \text{ এবং } (a-b)a=483\cdots(2)$$

(1) হইতে পাই $3a=69, \quad \therefore \quad a=23.$

(2) হইতে পাই $(23-b).23=483$, বা, $23-b=21, \quad \therefore \quad b=2.$

$\therefore$ নির্ণেয় অংশত্রয় = 21, 23, 25.

উদা. 4. a, b, c সমান্তর শ্রেণী হইলে প্রমাণ কর যে $ab+bc=2b^2$.

$\because \quad a, b, c$ একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore \quad b-a=c-b, \quad \therefore \quad 2b=a+c.$

এক্ষণে উভয়পক্ষকে b দ্বারা গুণ করিয়া পাই $2b^2=ab+bc.$

উদা. 5. a, b, c সমান্তর শ্রেণী হইলে প্রমাণ কর যে $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

$\because$ a, b, c সমান্তর শ্রেণীর পর পর 3টি পদ,

$\therefore$ $\frac{a}{abc}, \frac{b}{abc}, \frac{c}{abc}$ সমান্তর শ্রেণী হইবে।

অতএব, $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

[**দ্রষ্টব্য :** কোন সমান্তর শ্রেণীর পদগুলির সহিত একই সংখ্যা যোগ বা বিয়োগ করিলে কিংবা একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ফলগুলিও সমান্তর শ্রেণী হইবে। এই নিয়মের সাহায্যে উদা. 5 সমাধান করা হইয়াছে। অন্য প্রণালী নিম্নে দেখ।]

উদা. 6. a^2, b^2, c^2 সমান্তর শ্রেণী হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী। [C. U. '38 ; D. B. '45 ; G. U. '50]

[**অন্য প্রণালী**] $\because$ a^2, b^2, c^2 সমান্তর শ্রেণী (স্বীকার),

$\therefore$ $b^2-a^2=c^2-b^2$.

এক্ষণে, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে।

যদি $\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}$ হয়

অর্থাৎ যদি $\frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c+a-a-b}{(a+b)(c+a)}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b}$ হয়, অর্থাৎ যদি $b^2-a^2=c^2-b^2$ হয় ; কিন্তু প্রদত্ত সর্ত হইতে দেখানো হইয়াছে ইহারা সমান।

$\therefore$ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদা. 7. কোন সমান্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টি $5n^2+7n$, উহার প্রথম দুইটি পদ নির্ণয় কর। [C. U. '41]

n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n দ্বারা সূচিত করা হইল।

এখানে $S_n=5n^2+7n$; এখন $n=1$ ও $n=2$ বসাইয়া পাই,

$S_1=5.1^2+7.1=12$ (প্রথম একটি পদের সমষ্টি) ;

$S_2=5.2^2+7.2=34$ (প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি) ;

$\therefore$ t_1 (প্রথম পদ) $= S_1 = 12$ ($\because$ প্রথম একটি পদের সমষ্টি প্রথম পদই হয়)
এবং t_2 (দ্বিতীয় পদ) $= S_2 - S_1 = 34 - 12 = 22$ (প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি হইতে প্রথম পদ বিয়োগ করিলে দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায়),
$\therefore$ নির্ণেয় প্রথম দুইটি পদ $= 12$ ও 22.

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, কোন সমান্তর শ্রেণীর $2n$ পদের শেষার্ধের সমষ্টি উহার $3n$ পদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ। [C. U. 1876]

মনে কর, প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= b$.

$\therefore$ $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b \cdots (1)$

$S_{2n} = \frac{2n}{2}\{2a + (2n-1)b\} = n\{2a + (2a-1)b\} \cdots (2)$

এবং $S_{3n} = \frac{3n}{2}\{2a + (3n-1)b\} \cdots (3)$

এক্ষণে, $2n$-সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি $= S_{2n} - S_n$

$= n\{2a + (2n-1)b\} - \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$

$= \frac{n}{2}\{4a + 4bn - 2b - 2a - bn + b\}$

$= \frac{n}{2}\{2a + 3bn - b\} = \frac{n}{2}\{2a + (3n-1)b\}$

আবার, $\frac{1}{3} \times S_{3n} = \frac{1}{3} \times \frac{3n}{2}\{2a + (3n-1)b\} = \frac{n}{2}\{2a + (3n-1)b\}$.

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে $2n$-সংখ্যক পদের শেষার্ধের সমষ্টি $= 3n$-সংখ্যক পদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ।

উদা. 9. a, b, c কোন সমান্তর শ্রেণীর যথাক্রমে p-তম, q-তম ও r-তম পদ হইলে, প্রমাণ কর যে $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$.
[C. U. '32, '37, '46]

মনে কর, প্রথম পদ $= f$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে $f + (p-1)d = a \cdots (1)$, $f + (q-1)d = b \cdots (2)$, এবং $f + (r-1)d = c \cdots (3)$.

এক্ষণে, $(1) - (2)$ করিয়া পাই $(p-q)d = a - b \cdots (4)$

এবং $(2) - (3)$ করিয়া পাই $(q-r)d = b - c \cdots (5)$

$\therefore$ $(4) \div (5)$ করিয়া পাই $\dfrac{p-q}{q-r} = \dfrac{a-b}{b-c}$,

$\therefore$ $a(q-r) - b(q-r) = b(p-q) - c(p-q)$,

বা, $a(q-r) + b(r-q) - b(p-q) + c(p-q) = 0$,

বা, $a(q-r) + b(r-q-p+q) + c(p-q) = 0$,

$\therefore$ $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$.

উদা. 10. তিনটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদগুলি সমান এবং উহাদের সাধারণ অন্তর যথাক্রমে 1, 2 ও 3. শ্রেণী 3টির সমষ্টি যদি s_1, s_2, s_3 দ্বারা সূচিত হয়, তবে দেখাও যে $s_1 + s_3 = 2s_2$.

মনে কর, প্রথম পদ $=a$.

$\therefore\ s_1=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 1\}=\frac{n}{2}(2a+n-1),$

$s_2=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 2\}=\frac{n}{2}(2a+2n-2),$

$s_3=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\times 3\}=\frac{n}{2}(2a+3n-3),$

$\therefore\ s_1+s_3=\frac{n}{2}(2a+n-1)+\frac{n}{2}(2a+3n-3)$

$=\frac{n}{2}(4a+4n-4)=2\times\frac{n}{2}(2a+2n-2)=2s_2.$

Exercise 5

n পদ পর্যন্ত যোগ কর :—

1. $1\times3+3\times5+5\times7+7\times9+\cdots$ [W. B. S. F. '52]
2. $3.7+5.10+7.13+9.16+\cdots$ [D. B. '36]
3. $5^2+8^2+11^2+\cdots$
4. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+\cdots$
5. $2.3+3.4+4.5+\cdots$ [E. B. S. B. '49]
6. $1+3+6+10+15+\cdots$
7. $1+4+9+16+25+\cdots$
8. $2.3.4.+3.4.5+4.5.6+\cdots$
9. $(1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots$
10. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots$ [W.B.S.F. '53]
11. $\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots$
12. $1.7+3.9+5.11+\cdots$
13. $3\times8+6\times11+9\times14+\cdots$ [W. B. S. F. 1954 Sup.]
14. $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots$
15. (i) $2^2+5^2+8^2+\cdots$ [D. B. '35]
    (ii) $1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots$ (iii) $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots$
16. (i) $3+7+13+21+\cdots$
    (ii) $(1)+(2+3)+(4+5+6)+\cdots$
17. $1-3+5-7+\cdots 2n$ পদ পর্যন্ত
18. $1-2+3-4+\cdots(2p+1)$ পদ পর্যন্ত
19. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots r$ পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।
20. $1\times3^2+2\times4^2+3\times5^2+\cdots 100$ পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '54]

21. x, y, z সমান্তর হইলে, প্রমাণ কর যে $y+z,\ z+x,\ x+y$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

22. প্রমাণ কর যে $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ সমান্তর শ্রেণী হইলে, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ পদ তিনটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

23. যদি $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ সমান্তর শ্রেণী হয়, তবে দেখাও যে $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$ও সমান্তর শ্রেণী হইবে।

24. a, b, c সমান্তর শ্রেণী হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(a+2b-c)(2b+c-a)(c+a-b)=4abc.$$ [D. B. '31]

[সংকেত : $\because$ a, b, c সমান্তর শ্রেণী, $\therefore$ $a+c=2b.$]

25. a, b, c সমান্তর শ্রেণী হইলে, প্রমাণ কর যে, $b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

26. যদি $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণী হয় এবং যদি $a+b+c\neq 0$. তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ সমান্তর শ্রেণী হইবে।

27. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম p, q, r পদের সমষ্টি যথাক্রমে x, y, z হইলে প্রমাণ কর যে $xqr\,(q-r)+xrp(r-p)+xpq(p-q)=0.$ [C. U.]

28. 72-কে এরূপ তিনটি সমান্তরীয় অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম দুই অংশের গুণফল 480 হয়।

29. 5টি সমান্তর সংখ্যার সমষ্টি 20 এবং তাহাদের বর্গগুলির সমষ্টি 90 ; ঐ সংখ্যা 5টি নির্ণয় কর।

30. কোন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান্তর শ্রেণী গঠন করিলে প্রমাণ কর যে, তাহারা 3, 4, 5-এর সমানুপাতী হইবে।

31. কোন শ্রেণীর p-তম পদ $a+pb$; প্রমাণ কর উহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

32. একটি সমান্তর শ্রেণীর পদ সংখ্যা r, প্রমাণ কর যে, (i) r অযুগ্ম হইলে ঐ শ্রেণীর সমষ্টি উহার মধ্যপদের r গুণ হইবে এবং (ii) r যুগ্ম হইলে শ্রেণীর সমষ্টি উহার মধ্যপদদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক হইবে।

33. কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম ও q-তম পদ যথাক্রমে a ও b. প্রমাণ কর যে, উহার প্রথম $p+q$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{p+q}{2}(a+b+\frac{a-b}{p-q})$. [M.U.]

34. কোন সমান্তর শ্রেণীর p, q ও r পদের যোগফল যথাক্রমে a, b, c ; প্রমাণ কর যে $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0,$

[C.U. '45 ; D.B. '43, '45 ; G.U. '49, 51]

গুণোত্তর শ্রেণী (Geometrical Progression)

12. গুণোত্তর শ্রেণী (G.P.) : কোন শ্রেণীর অন্তর্গত পদগুলি যদি এরূপ হয় যে, উহাদের যে কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পূর্বপদের অনুপাত সর্বদাই সমান হয়, তাহা হইলে ঐরূপ শ্রেণীকে গুণোত্তর শ্রেণী বলে।

আর ঐ নিয়ত সমান অনুপাতটিকে ঐ শ্রেণীটির **সাধারণ অনুপাত** (common ratio) বলে। যথা—

(1) 1, 3, 9, 27,....ইহা গুণোত্তর শ্রেণী, ইহার সাধারণ অনুপাত 3.

(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\cdots$ ইহা গুণোত্তর শ্রেণী, ইহার সাধারণ অনুপাত $= -\frac{1}{2}$.

[**দ্রষ্টব্য :** (1) এই সাধারণ অনুপাতকে সাধারণতঃ r দ্বারা সূচিত করা হয়। (2) প্রথম দিক হইতে পদগুলিকে পর পর ঐ সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করিলে পর পর পদগুলি পাওয়া যায়। (3) সুতরাং শেষ দিক হইতে পদগুলিকে সাধারণ অনুপাত দ্বারা পর পর ভাগ করিতে থাকিলে পর পর পূর্ববর্তী পদগুলি পাওয়া যায়। (4) কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলি ক্রমিক সমানুপাতী।]

সাধারণ অনুপাত নির্ণয়। গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন পদকে তাহার ঠিক পূর্ব পদের দ্বারা ভাগ করিলে সাধারণ অনুপাত পাওয়া যায়।

সাধারণ পদ (General term)। কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে শ্রেণীটি হইবে $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

এক্ষণে প্রথম পদ $t_1 = a$ অর্থাৎ $a.r^0$ বা, $a.r^{1-1}$,

দ্বিতীয় পদ $t_2 = ar$ অর্থাৎ $a.r^{2-1}$,

তৃতীয় পদ $t_3 = ar^2$ অর্থাৎ $a.r^{3-1}$, ইত্যাদি

এখানে দেখা যাইতেছে যে প্রত্যেক পদে r-এর ঘাত উহার পদসংখ্যা অপেক্ষা এক কম। $\therefore$ উহার n-তম পদ বা $t_n = ar^{n-1}$.

উদাহরণমালা 7

উদা. 1. 1, 2, 4, 8,...এই শ্রেণীর ষষ্ঠ পদ নির্ণয় কর।

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{2}{1}=2$ এবং পদসংখ্যা $n=6$.

$\because\ t_n = ar^{n-1},\ \therefore\ t_6 = 1.2^5 = 32.$

উদা. 2. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\cdots$ শ্রেণীর অষ্টম পদ কত ?

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{-\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3}$ এবং পদসংখ্যা $n=8$.

$$\because\ t_n = ar^{n-1},\ \therefore\ t_8 = 1.(-\tfrac{1}{3})^7 = -\frac{1}{3^7} = -\frac{1}{2187}$$

উদা. 3. $1, -3, 9, -27, \cdots$ইহার n-তম পদ কত ?

এখানে $a=1, r=\frac{-3}{1}=-3$,

$\therefore\ t_n=ar^{n-1}=1\cdot\times(-3)^{n-1}=(-3)^{n-1}$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে উত্তরটি ঋণাত্মক বা ধনাত্মক তাহা নির্ণয় করা যায় না। n-এর মান অযুগ্ম হইলে $n-1$ যুগ্ম হইবে এবং তখন $(-3)^{n-1}$এর মান ধনাত্মক হইবে। আর n যুগ্মসংখ্যা হইলে $(-3)^{n-1}$ ঋণসংখ্যা হইবে।

উদা. 4. $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots$শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয় কর। [C.U.]

এখানে প্রথম পদ $a=\sqrt{3}$, সাধারণ অনুপাত $r=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$.

$$\therefore\ t_n=ar^{n-1}=\sqrt{3}.(\tfrac{1}{3})^{n-1}=\frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}=3^{\frac{1}{2}}.\ 3^{1-n}=3^{\frac{3}{2}-n}.$$

উদা. 5. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চম পদ 16 এবং নবম পদ 256 ; শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore$ সর্তদ্বয় হইতে পাই, $ar^4=16\cdots(1)$ এবং $ar^8=256\ldots(2)$

এখন (2)-কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $r^4=16.\quad\therefore\ r=\pm 2$.

এক্ষণে (1) হইতে পাই $a.16=16,\quad\therefore\ a=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় গুণোত্তর শ্রেণী$=1, 2, 4, 8,\ldots$অথবা, $1, -2, 4, -8,\ldots$

উদা. 6. $9, 3, 1,\ldots$শ্রেণীর কোন্ পদ $\frac{1}{243}$?

মনে কর, $\frac{1}{243}$ ঐ শ্রেণীটির n-তম পদ।

এস্থলে প্রথম পদ $a=9$ এবং সাধারণ অনুপাত $r=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

$\therefore\ ar^{-1}=\frac{1}{243}$, বা, $9.(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{1}{243}$.

বা, $3^2.\dfrac{1}{3^{n-1}}=\dfrac{1}{243}$, বা, $\dfrac{1}{3^{n-3}}=\dfrac{1}{3^5}$, বা, $3^{n-3}=3^5$.

$\therefore\ n-3=5,\quad\therefore\ n=8$. অতএব $\frac{1}{243}$ ঐ শ্রেণীটির অষ্টম পদ।

উদা. 7. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীতে 6টি পদ থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, উহার প্রথম ও শেষ পদের গুণফল তৃতীয় ও চতুর্থ পদের গুণফলের সমান। [P. U.]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

এখানে শেষ পদ $t_6=ar^5$.

$\therefore$ প্রথম ও শেষপদের গুণফল $=a\times ar^5=a^2r^5$.

আবার তৃতীয় ও চতুর্থ পদের গুণফল $=ar^2\times ar^3=a^2r^5$.

$\therefore$ প্রথম পদ $\times$ শেষ পদ $=$ তৃতীয় পদ $\times$ চতুর্থ পদ।

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী দুই পদের গুণফল ধ্রুবক। [D.B. '31]

মনে কর, প্রথম পদ $=a$, শেষ পদ $=b$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

প্রথম ও শেষ পদ হইতে p-তম পদ লইয়া পরীক্ষা করা যাউক। প্রথম দিক হইতে p-তম পদ $=ar^{p-1}$ এবং শেষ দিক হইতে পূর্বের p-তম পদ $=\dfrac{b}{r^{p-1}}$.

$\therefore$ উহাদের গুণফল $=ar^{p-1}\times\dfrac{b}{r^{p-1}}=ab=$ ধ্রুবক।

Exercise 6

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির উদ্দিষ্ট পদগুলি নির্ণয় কর :—

1. $4, 8, 16, \cdots$ (ষষ্ঠ পদ)।
2. $1, -3, 9, \ldots$ (নবম পদ)।
3. $\frac{5}{4}, 1, \frac{4}{5}, \ldots$ (সপ্তম পদ)।
4. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ (n-তম পদ)।
5. $16, 8, 4, \cdots$ (n-তম পদ)।
6. $3, -9, 27, \cdots$ (r-তম পদ)।

7. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 9 এবং সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{3}$; উহার সপ্তম পদ কত ?

8. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত ও ষষ্ঠ পদ যথাক্রমে $\frac{1}{2}$ ও 1 হইলে উহার 11-তম পদ কত হইবে ?

9. কোন্ গুণোত্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ 8 এবং নবম পদ 256 ?

10. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর দশম ও 14-তম পদ যথাক্রমে $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{32}$; উহার 17-তম পদ কত ?

11. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম দুই পদ 3 ও 1 ; উহার দশম পদ নির্ণয় কর। [C.U. '13]

12. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চম পদ 48 এবং 12-তম পদ 6144 ; উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। [D.B. '28]

13. 128, 64, 32,....এই শ্রেণীর কোন্ পদ $\frac{1}{2}$?

14. 320 কি 5, – 10, 20,... এই শ্রেণীর কোন পদ ?

15. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর r-তম পদ 2^{r-1} হইলে উহার দশম ও n-তম পদ কত হইবে ?

16. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম পদ a এবং q-তম পদ b ; উহার n-তম পদ নির্ণয় কর।

17. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম ও q-তম পদ যথাক্রমে c ও d ; উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। [C. U. '34]

18. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর $(p+q)$-তম পদ m এবং $(p-q)$-তম পদ n ; উহার p-তম এবং q-তম পদ নির্ণয় কর। [B. U. 1888 ; C. U. '34, '42]

গুণোত্তরীয় মধ্যক (Geometric Mean)

12. (1) যদি তিনটি রাশি গুণোত্তরীয় শ্রেণীতে থাকে, তবে মধ্যের রাশিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে। যথা, 3, 9, 27 এই তিনটি সংখ্যা গুণোত্তরীয়। মধ্য-সংখ্যা 9কে 3 ও 27-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

(2) কতকগুলি পদ গুণোত্তরীয় শ্রেণী গঠন করিলে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের ততগুলি গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

যথা, 3, 9, 27, 81, 243 এই সংখ্যাগুলি গুণোত্তরীয় শ্রেণী গঠন করে।
এখানে 9, 27, 81 পদ তিনটিকে 3 ও 243-এর মধ্যে তিনটি গুণোত্তরীয় মধ্যক বলে।

উদাহরণমালা 8

উদা. 1. a ও b-এর মধ্যে গুণোত্তরীয় মধ্যকটি নির্ণয় কর। [C. U. '41]

মনে কর, গুণোত্তরীয় মধ্যকটি m, সুতরাং a, m, b গুণোত্তরীয় শ্রেণী গঠন করিল। $\therefore$ $\frac{m}{a}=\frac{b}{m}$ [$\because$ প্রত্যেকটি সাধারণ অনুপাতের সমান।]

বা, $m^2=ab$, $\therefore$ $m=\pm\sqrt{ab}.$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে দেখা গেল, দুইটি রাশির গুণোত্তরীয় মধ্যক তাহাদের গুণফলের বর্গমূলের সমান। ইহা মনে রাখিবে।]

উদা. 2. a ও b-এর মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

এখানে প্রথম পদ a, শেষ পদ b এবং উহাদের মধ্যস্থিত n-সংখ্যক মধ্যক লইয়া একটি গুণোত্তরীয় শ্রেণী হইবে এবং তাহার পদসংখ্যা হইবে $n+2$, উহার শেষ পদ বা $(n+2)$-তম পদ হইল b.

মনে কর, উহার সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore\ b=ar^{n+1}$, বা, $r^{n+1}=\dfrac{b}{a}$, $\therefore\ r=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \ldots\ldots, a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$.

উদা. 3. $3\frac{5}{9}$ এবং $40\frac{1}{2}$-এর মধ্যে 5টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও। [D. B. '35]

এখানে প্রদত্ত পদদ্বয় মধ্যবর্তী 5টি মধ্যক সমেত একটি গুণোত্তরীয় শ্রেণী গঠন করে। উহার প্রথম পদ $3\frac{5}{9}$, পদসংখ্যা $=5+2=7$.

মনে কর, উহার সাধারণ অনুপাত $=r$.

এখানে $t_7=40\frac{1}{2}$, $a=3\frac{5}{9}=\frac{32}{9}$, $\therefore\ ar^{7-1}=40\frac{1}{2}$,

বা, $\dfrac{32}{9}r^6=\dfrac{81}{2}$, বা, $r^6=\dfrac{81\times 9}{2\times 32}=\dfrac{3^6}{2^6}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^6$; $\therefore\ r=\pm\frac{3}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $=5\frac{1}{3}, 8, 12, 18, 27$;

অথবা, $-5\frac{1}{3}, 8, -12, 18, -27$.

উদা. 4. দুইটি সংখ্যার গুণোত্তরীয় মধ্যক 9 এবং সমান্তরীয় মধ্যক 15 ; ঐ সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [C. U. '26]

মনে কর, সংখ্যা দুইটি a ও b.

$\because$ a ও b-এর মধ্যস্থিত সমান্তরীয় মধ্যকটি $\frac{a+b}{2}$,

$\therefore$ এখানে $\frac{a+b}{2}=15$, বা, $a+b=30\ldots(1)$

আবার, $\because$ a ও b-এর মধ্যস্থিত গুণোত্তরীয় মধ্যকটি $=\pm\sqrt{ab}$,

$\therefore$ এখানে $\pm\sqrt{ab}=9$, $\therefore\ ab=81\cdots(2)$.

এক্ষণে, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=30^2-4\times 81=900-324=576$.

$\therefore\ a-b=\pm\sqrt{576}=\pm 24\cdots(3)$.

এখন (1) ও (3) সমাধান করিয়া পাই, $a=27$ এবং $b=3$;

অথবা $a=3$, $b=27$ [যদি $a-b=-24$ হয়]

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 27 ও 3, অথবা 3 ও 27.

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, দুইটি বাস্তব ধনাত্মক রাশির সমান্তরীয় মধ্যকটি গুণোত্তরীয় মধ্যক অপেক্ষা বৃহত্তর।

C. U. '28, '39, '41, '44, '47, '48 ; G. U. '52]

মনে কর, রাশিদ্বয় a ও b. $\because$ a, b ধনাত্মক

$\therefore$ উহাদের সমান্তরীয় মধ্যক $=\frac{a+b}{2}$; এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক $=\sqrt{ab}.$

এক্ষণে, $\frac{a+b}{2}-(\sqrt{ab})=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$, এখানে লবটি পূর্ণবর্গ এবং a ও b বাস্তব বলিয়া ইহা একটি ধনরাশি।

$\therefore$ $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, অর্থাৎ সমান্তরীয় মধ্যক > গুণোত্তরীয় মধ্যক।

উদা. 6. প্রমাণ কর যে a এবং b-এর মধ্যবর্তী n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যকের গুণফল উহাদের মধ্যবর্তী একটিমাত্র গুণোত্তরীয় মধ্যকের n-তম ঘাতের সমান।

মনে কর, সাধারণ অনুপাত $=r$.

a ও b-এর মধ্যবর্তী মধ্যকটি $=\sqrt{ab}=(ab)^{\frac{1}{2}}$.

$\therefore$ ঐ মধ্যকটির n-তম ঘাত $=\{(ab)^{\frac{1}{2}}\}^n=(ab)^{\frac{n}{2}}$.

এখন n-সংখ্যক মধ্যকগুলি $=ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots, \frac{b}{r^3}, \frac{b}{r^2}, \frac{b}{r}$.

মনে কর, উহাদের গুণফল $=p$. প্রমাণ করিতে হইবে যে $p=(ab)^{\frac{n}{2}}$.

এক্ষণে, $p=ar\times ar^2\times ar^3\times\ldots\ldots\times\frac{b}{r^3}\times\frac{b}{r^2}\times\frac{b}{r}$

এবং $p=\frac{b}{r}\times\frac{b}{r^2}\times\frac{b}{r^3}\times\ldots\ldots\times ar^3\times ar^2\times ar$ (উল্টাইয়া লিখিয়া)

(গুণ করিয়া) $p^2=ab\times ab\times ab\times\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$$=(ab)^n, \quad \therefore \quad p=(ab)^{\frac{n}{2}}.$$

[দ্রষ্টব্য : এই প্রণালীটি বুঝিয়া লও। এখানে a প্রথম পদ, b শেষ পদ এবং r সাধারণ অনুপাত বলিয়া প্রথম মধ্যক ar, দ্বিতীয় মধ্যক ar^2, তৃতীয় মধ্যক ar^3,.... এইভাবে লেখা যায়। আবার শেষ দিক হইতে ধরিলে শেষ মধ্যক অর্থাৎ b-এর পূর্বপদ $\frac{b}{r}$, তার আগের মধ্যক $\frac{b}{r^2}$......এইভাবে লেখা হইল। উপরের গুণটি লক্ষ্য কর :—প্রথম পংক্তির ar-এর সহিত দ্বিতীয় পংক্তির $\frac{b}{r}$ গুণ করিয়া হয় ab. এইরূপে $ar^2\times\frac{b}{r^2}=ab$ ইত্যাদি, হইল।]

উদা. 7. দুইটি অসমান ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা p ও q-এর সমান্তরীয় মধ্যক A এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক G ; প্রমাণ কর যে, $A>G>\frac{G^2}{A}$. [C. U. '50]

এখানে $A=p$ ও q-এর সমান্তরীয় মধ্যক$=\frac{p+q}{2}$.

এবং $G=$,, ,, গুণোত্তরীয় ,, $=\sqrt{pq}$

$$\therefore \ \frac{G^2}{A}=\frac{pq}{\frac{p+q}{2}}=\frac{2pq}{p+q}=k \text{ (মনে কর)}$$

এক্ষণে $\frac{p+q}{2}-\sqrt{pq}=\frac{p+q-2\sqrt{pq}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2$, ইহা ধনাত্মক বলিয়া $\frac{p+q}{2}>\sqrt{pq}$, অর্থাৎ $A>G$ (প্রমাণিত হইল)।

আবার, $A.k=\frac{p+q}{2}\times\frac{2pq}{p+q}=pq=G^2=G.G$, কিন্তু $A>G$ প্রমাণিত হইয়াছে, $\therefore k<G$, $\therefore G>\frac{G^2}{A}$, $\therefore A>G>\frac{G^2}{A}$.

Exercise 7

প্রদত্ত রাশি দুইটির গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর :—

1. 5, 125. 2. $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{8}$. 3. -3 এবং -27.

4. -6 ও $-2\frac{2}{3}$. 5. x^3y ও xy^3 ; $3\sqrt{3}$ ও $9\sqrt{3}$.

6. 4 ও 324-এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক স্থাপন কর। [C. U.]

7. 5 ও 135-এর মধ্যে 2টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও। [C. U. '16]

8. 25 এবং 164025-এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক কি কি হইতে পারে ? [Pat. U. '19]

9. (*i*) $\frac{1}{9}$ ও 9-এর মধ্যে 3টি এবং (*ii*) 3 ও -81-এর মধ্যে 2টি গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

10. $\frac{81}{16}$ এবং $\frac{64}{729}$-এর মধ্যে 9টি গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর। [D. B. '30]

11. প্রমাণ কর যে, যে-কোন গুণোত্তরীয় শ্রেণীর $2n$-তম পদ উহার n-তম এবং $3n$-তম পদের মধ্যসমানুপাতী। [C. U. 1877]

12. প্রমাণ কর যে, গুণোত্তর শ্রেণীর যে-কোন একটি পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের গুণফল ঐ পদটির বর্গের সমান।

13. যদি দুইটি রাশির সমান্তরীয় ও গুণোত্তরীয় মধ্যক যথাক্রমে A ও G হয়, তবে দেখাও যে রাশি দুইটি $A \pm \sqrt{A^2 - G^2}$.

14. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পদসংখ্যা অযুগ্ম হয়, তবে প্রমাণ কর যে, উহার প্রথম ও শেষ পদের গুণফল উহার মধ্যপদের বর্গের সমান।

15. একটি গুণোত্তর শ্রেণীতে যুগ্ম সংখ্যক পদ আছে। প্রমাণ কর যে, উহার মধ্যপদ দুইটির গুণফল উহার প্রথম ও শেষ পদের গুণফলের সমান।

[সঙ্কেত : মনে কর, পদসংখ্যা $=2n$; $\therefore$ n-তম এবং $(n+1)$-তম পদদ্বয় শ্রেণীটির দুইটি মধ্যপদ হইবে।]

16. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমান্তরীয় মধ্যক 25 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 24 হইবে।

17. a ও b-এর সমান্তরীয় মধ্যক : গুণোত্তরীয় মধ্যক $= m : n$.

প্রমাণ কর যে, $a : b = m + \sqrt{m^2 - n^2} : m - \sqrt{m^2 - n^2}$. [A. U. 1889]

18. যদি p ও q দুইটি অসমান ধনাত্মক রাশির সমান্তরীয় মধ্যক A, গুণোত্তরীয় মধ্যক G, এবং $H = \dfrac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$ হয়, তবে দেখাও যে $A > G > H$. [E.B.S.B. '48]

13. গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়

উদাহরণমালা 9

উদা. 1. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r, উহার প্রথম n পদের সমষ্টি কত? [C. U. '32, '35, '37, '46 ; D. B. '39, '42]

শ্রেণীর প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$ এবং মনে কর সমষ্টি $=s$.

এখানে পদসংখ্যা $=n$, সুতরাং n-তম পদ $=ar^{n-1}$.

$$\text{অতএব } s = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \ldots (1)$$

$$\text{এবং } (1) \times r \text{ করিয়া, } sr = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \cdots (2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই, $s - sr = a - ar^n$,

বা, $s(1-r) = a(1-r^n)$, $\therefore$ $s = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} \cdots (3)$

আবার (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই, $sr - s = ar^n - a$,

$$\therefore \quad s = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \cdots (4).$$

[দ্রষ্টব্য : (1) উপরে যোগফলের দুইটি সূত্র পাওয়া গেল। r-এর মান এক অপেক্ষা বেশী ও ধনরাশি হইলে দ্বিতীয় সূত্র, অন্যথা প্রথম সূত্র প্রয়োগ করিবে। (2) শেষ পদ যদি l হয়, তবে $l=ar^{n-1}$; এখন সূত্রটি হইতে পাই,

$s=\dfrac{ar^n-a}{r-1}=\dfrac{ar^{n-1}.\,r-a}{r-1}=\dfrac{lr-a}{r-1}$, শেষ পদ জানা থাকিলে এই সূত্র প্রয়োগ করিবে। (3) প্রতি অঙ্কে প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, পদসংখ্যা n কত তাহা উদা. 2-এর মত আগে লিখিবে।]

উদা. 2. $1+2+4+\cdots$, ইহার 20 পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর। [C.U. '22]

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=\frac{2}{1}=2$ এবং পদসংখ্যা $n=20$.

মনে কর, যোগফল $=s$,

$$\therefore\quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{1(2^{20}-1)}{2-1}=2^{20}-1.$$

উদা 3. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$ শ্রেণীর n পদ পর্যন্ত সমষ্টি কত?

[C. U. '12, '32 Sup.]

এস্থলে $a=1$, $r=\frac{1}{3}\div 1=\frac{1}{3}$; মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$$\therefore\quad s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(\frac{1}{3})^n\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\dfrac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

উদা. 4. $1-2+4-8+\cdots n$ পদ পর্যন্ত যোগফল কত?

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত $r=-2$. মনে কর সমষ্টি s.

$$\therefore\quad s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{\{1-(-2)\ \}}{3}=\tfrac{1}{3}\{1-(-2)^n\}.$$

[দ্রষ্টব্য : উদা. 4-এ $(-2)^n$ ধনরাশি কি ঋণরাশি তাহা নির্ণয় করা যায় না, কারণ n যুগ্ম হইলে উহা ধনরাশি এবং অযুগ্ম হইলে $(-2)^n$ ঋণরাশি হইবে।]

উদা. 5. $3+6+12+\ldots+384$, ইহার সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে $a=3$, $r=6\div 3=2$, এবং শেষপদ $l=384$

$$\therefore\quad \text{নির্ণেয় সমষ্টি}=\frac{lr-a}{r-1}=\frac{2\times 384-3}{2-1}=765.$$

উদা. 6. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+4+16+\cdots\cdots$এর 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এস্থলে $a=1$, $r=4\div 1=4$. এক্ষণে, $t_1=1$, $t_2=4=1.4^1$, $t_3=16=1.4^2$,

অতএব স্পষ্টতঃ $t_{10}=1.4^9=4^9$. মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$\therefore\quad s=1+4+4^2+\cdots+4^9\cdots(1)$

$\therefore\quad 4s=\quad 4+4^2+\cdots+4^9+4^{10}\cdots(2)$

এখন (2) − (1) করিয়া $3s=4^{10}-1$, $\therefore\quad s=\frac{1}{3}(4^{10}-1)$.

উদা. 7. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া পরবর্তী শ্রেণীর n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$ [C. U. '10, '18, '23, '38 ; D. B. '34, '40]

এখানে $t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2^1}, t_3=\frac{1}{2^2}$ $\therefore$ স্পষ্টতঃ $t_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$$\therefore\quad s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdots(1)$$

$$\text{এবং } \tfrac{1}{2}s=\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\cdots(2)$$

[(1)-কে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

(1) − (2) করিয়া পাই $\frac{1}{2}s=1-\frac{1}{2^n}$, $\therefore\quad s=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

উদা. 8. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ $\frac{1}{27}$ এবং সপ্তম পদ $\frac{1}{729}$; উহার n পদের সমষ্টি কত ?

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore$ সর্তদ্বয় হইতে পাই, $ar^3=\frac{1}{27}\cdots(1)$ এবং $ar^6=\frac{1}{729}\cdots(2)$

(2) ÷ (1) করিয়া পাই, $ar^6\div ar^3=\frac{1}{729}\div\frac{1}{27}$, বা, $r^3=\frac{1}{27}=(\frac{1}{3})^3$,

$\therefore\quad r=\frac{1}{3}$. $\therefore$ (1) হইতে $a.(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$, $\therefore\quad a=1$.

$$\text{এক্ষণে } s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3^n-1}{2.3^{n-1}}.$$

উদা. 9. যে শ্রেণীর p-তম পদটি 3^p+3p, তাহার দশটি পদের সমষ্টি কত ?

এখানে $t_p=3^p+3p$, $\therefore\ p=1, 2, 3,\ldots, 10$ পর্যন্ত বসাইয়া পাই

$t_1=3^1+3.1$

$t_2=3^2+3.2$

$t_3=3^3+3.3$

....

$t_{10}=3^{10}+3.10$

$\therefore$ সমষ্টি $s=(3+3^2+3^3+\cdots+3^{10})+3(1+2+3+\cdots+10)$

$$=\frac{3(3^{10}-1)}{3-1}+3\times\tfrac{10}{2}(10+1)=\tfrac{3}{2}(3^{10}-1)+165=\frac{3^{11}+327}{2}.$$

উদা. 10. $(a-x)+(a^2-x^2)+(a^3-x^3)+\cdots\cdots+(a^n-x^n)$, ইহার যোগফল কত ?

প্রদত্ত শ্রেণী হইতে দুইটি গুণোত্তর শ্রেণী পাওয়া যায়। মনে কর, সমষ্টি $=s$.

$\therefore\ s=(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)-(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)$

$=(a+a^2+a^3+\cdots n$ পদ পর্যন্ত$)-(x+x^2+x^3+\cdots n$ পদ পর্যন্ত$)$

$$=\frac{a(a^n-1)}{a-1}-\frac{x(x^n-1)}{x-1}.$$

উদা. 11. 1, 2, 4,$\cdots$শ্রেণীটির কতগুলি পদের সমষ্টি 255 ?

মনে কর, শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 255. এখানে প্রথম পদ $a=1$. সাধারণ অনুপাত $r=2\div1=2$, এবং সমষ্টি $s=255$.

$$\because\ \frac{a(r^n-1)}{r-1}=s,\quad \therefore\ \frac{1(2^n-1)}{2-1}=255,\ \text{বা},\ 2^n-1=255,$$

বা, $2^n=256=2^8$. $\therefore\ n=8$. $\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=8$.

উদা. 12. কোন মূলধন হইতে প্রতি বৎসর পূর্ব বৎসরের দ্বিগুণ সুদ হয়। প্রথম বৎসরান্তে সুদ 50 টাকা হইলে 10 বৎসরে উহার মোট কত সুদ হইবে ?

এখানে 10 বৎসরের মোট সুদ $=(50+100+200+\cdots10$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)$ টা.

$$=\frac{50(2^{10}-1)}{2-1}\text{ টা.}=50(2^{10}-1)\text{ টাকা}=51150\text{ টাকা।}$$

Exercise 8

যোগফল নির্ণয় কর :—

1. $1+2+4+8+\cdots8$ পদের [C. U. '21]
2. $128+64+32+\cdots$ 9 পদের
3. $1+3+9+27+\cdots n$ পদের [C. U. '24, '47]
4. $1-3+9-27+\cdots2n$ পদের
5. $2+1+\frac{1}{2}+\cdots8$ পদের
6. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots n$ পদের
7. $\frac{1}{\sqrt{3}}+1+\sqrt{3}+3+\cdots18$ পদের
8. $1+2^{-1}+4^{-1}+8^{-1}+\cdots10$ পদের
9. $\cdot5+\cdot05+\cdot005+\cdots(n-1)$ সংখ্যক পদের
10. $\frac{1}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\cdots n$ পদ পর্যন্ত [C. U. '11]

11. $3-6+12-\cdots-384.$ 12. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{256}.$

13. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots n$ পদের

14. $\frac{a+b}{a-b}$, 1, $\frac{a-b}{a+b}, \ldots r$ পদের 15. $\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\sqrt{2}+\cdots 12$ পদের

16. $1-2+4-8+\cdots 2p$ পদের 17. $12+24+48+\cdots+768.$

18. $\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots 10$ পদের

কোন সূত্র সাহায্য না লইয়া সমষ্টি নির্ণয় কর :—

19. $4+2+1+\cdots 10$ পদের 20. $2+4+8+\cdots n$ সংখ্যক পদের

21. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots n$ পদ পর্যন্ত [C. U. '12]

22. $6+12+24+\cdots+768$

23. যে শ্রেণীর n-তম পদ 2^n+2n, তাহার 8টি পদের সমষ্টি কত ?

24. $128+64+32+\cdots$এই শ্রেণীর কয়টি পদের সমষ্টি $255\frac{3}{4}$?

25. $1-2+4-8+\cdots$শ্রেণীর কয়টি পদের সমষ্টি -85 হইবে ?

26. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots$, এই শ্রেণীর কয়টি পদ যোগ করিলে $1\frac{121}{243}$ হয় ?

27. একটি শ্রেণীর r-তম পদ $r+(\frac{1}{2})^r$ হইলে উহার প্রথম 6টি পদের সমষ্টি কত ?

28. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর দ্বিতীয় পদ -3 এবং পঞ্চম পদ 81 ; উহার প্রথম 9টি পদের সমষ্টি কত ?

29. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে 2 ও $\frac{1}{2}$; উহার প্রথম 8টি পদের সমষ্টি কত ?

30. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ও দ্বিতীয় পদের সমষ্টি 12 এবং উহার চতুর্থ ও পঞ্চম পদের সমষ্টি 324 ; উহার প্রথম ছয়টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[E. B. S. B. '49]

31. যে গুণোত্তর শ্রেণীর চতুর্থ ও সপ্তম পদ যথাক্রমে 20 ও 160 তাহার প্রথম 25টি পদের সমষ্টি কত ? [D. B. '45]

32. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম 6টি পদের সমষ্টি প্রথম 3টি পদের সমষ্টির 9 গুণ। যদি উহার সপ্তম পদটি 384 হয়, তবে প্রথম 10টি পদের সমষ্টি কত ?

[W. B. S. F. 1956]

33. একটি আম গাছে প্রত্যেক বৎসর পূর্ব বৎসরের দ্বিগুণ আম হয়। প্রথম বৎসরে উহাতে 100টি আম হইলে 8 বৎসরে কয়টি আম হইবে ?

14. প্রগতি সংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদাহরণমালা 10

উদা. 1. যদি a, b, c, d গুণোত্তর শ্রেণী হয়, তবে দেখাও যে a^2+b^2, b^2+c^2 এবং c^2+d^2 একটি গুণোত্তর শ্রেণী। [C. U. '19]

এস্থলে a, b, c, d গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে। মনে কর, সাধারণ অনুপাত$=r$.

$$\therefore\ b=ar,\ c=ar^2,\ d=ar^3.$$

$$\therefore\ a^2+b^2=a^2+a^2r^2=a^2(1+r^2),$$

$$b^2+c^2=a^2r^2+a^2r^4=a^2r^2(1+r^2),$$

$$c^2+d^2=a^2r^4+a^2r^6=a^2r^4(1+r^2).$$

এক্ষণে, $a^2(1+r^2)$, $a^2r^2(1+r^2)$, $a^2r^4(1+r^2)$ এই পদ তিনটি গুণোত্তর শ্রেণী, কারণ ইহাদের সাধারণ অনুপাত r^2.

$\therefore$ a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2 ইহারাও একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

উদা. 2. a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী। [D. B. '46 ; G. U. '48]

মনে কর, a, b, c এই প্রদত্ত গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত r.

$$\therefore\ b=ar,\ c=ar^2.$$

$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ সমান্তর শ্রেণী হইবে যদি প্রমাণ করা যায় যে

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{2b}\times 2=\frac{1}{b}.$$

এক্ষণে, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}=\frac{1}{a(1+r)}+\frac{1}{ar(1+r)}$

$$=\frac{r+1}{ar(1+r)}=\frac{1}{ar}=\frac{1}{b}.$$

অতএব, $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদা. 3. 6 ও 16-এর মধ্যে এরূপ দুইটি সংখ্যা বসাও যেন প্রথম তিনটি সংখ্যা সমান্তর ও শেষ তিনটি সংখ্যা গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকে।

মনে কর, সংখ্যাদ্বয় b ও c.

$\therefore$ 6, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী$\cdots(1)$.

এবং b, c, 16 একটি গুণোত্তর শ্রেণী....(2).

(1) হইতে পাই $2b=6+c\cdots(3)$, এবং (2) হইতে পাই $c^2=16b\cdots(4)$

এখন (3) ও (4) হইতে পাই $c^2=8.2b=8(6+c)=48+8c$,

বা, $c^2-8c-48=0$, বা, $(c-12)(c+4)=0$, $\therefore$ $c=12$ বা, -4.

যদি $c=12$ হয়, তবে (3) হইতে পাই $b=9$,

যদি $c=-4$ হয়, " " " " $b=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=9$ ও 12, অথবা 1 ও -4.

উদা. 4. তিনটি গুণোত্তরীয় পদের সমষ্টি $24\frac{4}{5}$ এবং তাহাদের গুণফল 64; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [A. U. ; E. B. S. B. '50]

মনে কর, সংখ্যাত্রয় $=\frac{a}{r}$, a, ar.

$\therefore$ $\frac{a}{r}\times a\times ar=64\cdots(1)$ এবং $\frac{a}{r}+a+ar=24\frac{4}{5}\cdots(2)$

এখন, (1) হইতে $a^3=64$, $\therefore$ $a=4$.

(2) হইতে $\frac{4}{r}+4+4r=\frac{124}{5}$ [$\because$ $a=4$],

বা, $\frac{4}{r}+4r=\frac{124}{5}-4=\frac{104}{5}$, বা, $\frac{1}{r}+r=\frac{26}{5}$,

বা, $5r^2-26r+5=0$, বা, $(r-5)(5r-1)=0$, $\therefore$ $r=5$ বা $\frac{1}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাত্রয় $=\frac{4}{5}$, 4, 20 ; অথবা 20, 4, $\frac{4}{5}$.

উদা. 5. a, b, c কোন গুণোত্তরীয় শ্রেণীর p-তম, q-তম ও r-তম পদ হইলে প্রমাণ কর যে $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$.

[H. S. '68 ; C. U. '51 ; G. U. '50 ; S. F. '53]

মনে কর, প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অনুপাত $=d$.

$\therefore$ $a=fd^{p-1}$, $b=fd^{q-1}$ এবং $c=fd^{r-1}$.

$\therefore$ $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=(fd^{p-1})^{q-r}.(fd^{q-1})^{r-p}.(fd^{r-1})^{p-q}$

$=f^{q-r}.d^{pq-q-pr+r}\times f^{r-p}.d^{qr-r-pq+p}\times f^{p-q}.d^{rp-p-rq+q}$

$=f^{a-r+r-p+p-a} \times d^{pa-a-pr+r+ar-r-pa+p+rp-p-ra+a}$

$=f^0 \times d^0 = 1 \times 1 = 1.$

উদা. 6. $4+44+444+\cdots$ এই শ্রেণীর n পদের যোগফল নির্ণয় কর। [Pat. U. '18]

মনে কর, যোগফল $=s$.

$\therefore\ s = 4+44+444+\cdots+n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=4(1+11+111+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=\frac{4}{9}(9+99+999+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=\frac{4}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$=\frac{4}{9}\{(10+10^2+10^3+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-n\}$

$$=\frac{4}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{(10-1)}-n\right\}=\frac{40}{81}(10^n-1)-\frac{4n}{9}.$$

উদা. 7. $1+4+10+22+46+\cdots$ ইহার n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে কর, সমষ্টি $=s$ এবং n-তম পদ $=t_n$.

$s = 1+4+10+22+46+\cdots+t_n$

আবার $s = \quad 1+4+10+22+\cdots+t_{n-1}+t_n$

[একপদ সরাইয়া লেখা হইল]

(বিয়োগ) $0=(1+3+6+12+24+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-t_n$

$\therefore\ t_n = 1+3+6+12+24+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=1+\{(3+6+12+24+\cdots n-1)$* সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$$=1+\frac{3(2^{n-1}-1)}{2-1}=1+3(2^{n-1}-1)=3.2^{n-1}-2.$$

এখন n-এর স্থানে $1, 2, 3, \ldots, n$ বসাইয়া পাই,

$t_1 = 3.1-2$

$t_2 = 3.2-2$

$t_3 = 3.2^2-2$

....

$t_n = 3.2^{n-1}-2$

$\therefore\ s = 3(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})-2n$

$=3(1+2+2^2+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-2n$

$$=3\times\frac{1(2^n-1)}{2-1}-2n=3.2.-3-2n.$$

*এখানে 1 ব্যতীত অন্য পদগুলি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত বলিয়া শ্রেণীর পদসংখ্যা $n-1$ ধরা হইল।

উদা. 8. $1+2a+3a^2+4a^3+\cdots\cdots$, ইহার n পদের সমষ্টি কত ?

এখানে $t_n=n.a^{n-1}$.

$\therefore\ s=1+2a+3a^2+4a^3+\cdots+n.a^{n-1}$

এবং $sa= \quad a+2a^2+3a^3+\cdots+(n-1)a^{n-1}+n.a^n$

[a দ্বারা গুণ করিয়া]

(বিয়োগ) $s(1-a)=(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1})-na^n$

$$=\frac{1(1-a^n)}{1-a}-na^n, \quad \therefore\ s=\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}.$$

উদা. 9. $(1)+(1+3)+(1+3+3^2)+(1+3+3^2+3^3)+\cdots$এই শ্রেণীর n পদের সমষ্টি কত ?

[C. U. '31]

এখানে n-তম পদ অর্থাৎ $t_n=(1+3+3^2+3^3+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$$=\frac{1(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)=\frac{1}{2}.\,3^n-\frac{1}{2}.$$

এখানে, $n=1, 2, 3,\ldots, n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.\,3^1-\tfrac{1}{2}$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.\,3^2-\tfrac{1}{2}$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}.\,3^3-\tfrac{1}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}.3^n-\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore\ s=\frac{1}{2}(3+3^2+3^3+\ldots+3^n)-\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}\times\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{n}{2}$$

$$=\frac{3}{4}(3^n-1)-\frac{n}{2}=\frac{3^{n+1}}{4}-\frac{3}{4}-\frac{n}{2}=\frac{1}{4}(3^{n+1}-3-2n).$$

উদা. 10. যদি p, q, r সমান্তর শ্রেণী হয়, তবে প্রমাণ কর যে কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম ও r-তম পদগুলিও গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে। [S. F. 1952]

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $=f$ এবং সাধারণ অনুপাত $=d$.

$\therefore$ উহার p-তম পদ $=fd^{p-1}$, q-তম পদ $=fd^{q-1}$ এবং r-তম পদ $=fd^{r-1}$.

এক্ষণে, fd^{p-1}, fd^{q-1} এবং fd^{r-1} গুণোত্তর শ্রেণী হইবে,

যদি $(fd^{q-1})^2=fd^{p-1}.\,fd^{r-1}$ হয়, অর্থাৎ যদি $f^2d^{2q-2}=f^2d^{p+r-2}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $d^{2q-2}=d^{p+r-2}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $2q-2=p+r-2$ হয়, অর্থাৎ যদি $2q=p+r$ হয়,

অর্থাৎ যদি p, q, r সমান্তর শ্রেণী হয়।

Exercise 9

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির n পদের যোগফল নির্ণয় কর :—

1. $7+77+777+\cdots\cdots$
2. $2+22+222+\cdots\cdots$
3. $\cdot2+\cdot22+\cdot222+\cdots\cdots$
4. $1.2+2.3+4.4+8.5+\cdots$
5. $1\times1+2\times3+3\times9+4\times27+\cdots$
6. $1+3+7+15+\cdots$
7. $1+4+13+40+121+\cdots$
8. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots$

a, b, c, d গুণোত্তর শ্রেণী হইলে প্রমাণ কর :

9. $a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-d^2$ গুণোত্তর শ্রেণী হইবে।

10. $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-d)^2$,, ,, ,,

11. $a^2+b^2+c^2, ab+bc+cd, b^2+c^2+d^2$ গুণোত্তর শ্রেণী।

12. $\frac{1}{a^2+b^2}, \frac{1}{b^2+c^2}, \frac{1}{c^2+d^2}$ গুণোত্তর শ্রেণী হইবে।

13. $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$.
[C. U. '43 ; D. B. '25, '26]

14. x, y, z গুণোত্তর শ্রেণীর ক্রমিক তিনটি পদ। প্রমাণ কর যে

$$x^2y^2z^2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)=x^3+y^3+z^3.$$

15. যে শ্রেণীর r-তম পদ 2^r+2r তাহার প্রথম n পদের যোগফল কত ?
[D. B. '41]

16. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, n-তম পদ l এবং প্রথম n পদের গুণফল P ; প্রমাণ কর যে $P=(al)^{\frac{n}{2}}$. [C. U. '18 ; D. B. '33, '43, '47]

17. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম তিনটি পদের সমষ্টি 14 এবং উহাদের বর্গের সমষ্টি 84 ; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

18. 21-কে এরূপ 3 অংশে বিভক্ত কর যেন অংশগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে এবং তাহাদের গুণফল 64 হয়। [G. U. '53]

19. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর ক্রমিক 3টি পদের মধ্যপদটি 6 এবং প্রথম ও তৃতীয় পদের সমষ্টি 15 ; ঐ শ্রেণীটি নির্ণয় কর। [C. U. '32]

20. সমান্তর শ্রেণীর ক্রমিক তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 15 এবং উহাদের সহিত যথাক্রমে 1, 4 ও 19 যোগ করিলে যোগফলগুলি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে। ঐ সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর। [C. U. '50]

21. x, y, z-এর সহিত কি যোগ করিলে যোগফলগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণী হইবে ?

22. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম তিনটি সংখ্যার গুণফল 512 এবং প্রথমটির সহিত 8 ও দ্বিতীয়টির সহিত 6 যোগ করিলে সংখ্যাগুলি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর। [C. U. (High.) '50]

23. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পর পর তিনটি সংখ্যা হইতে অন্য গুণোত্তর শ্রেণীর পর পর তিনটি সংখ্যা যথাক্রমে বিয়োগ করায় অন্তরফলগুলিও একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিল। প্রমাণ কর যে ঐ শ্রেণী তিনটির সাধারণ অনুপাত সমান। [B .U. 1890]

24. a, b, c সমান্তর শ্রেণী এবং a, b, d গুণোত্তর শ্রেণী হইলে প্রমাণ কর যে $a, a-b, d-c$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী। [C. U. '10]

25. যদি a, b, c সমান্তর শ্রেণী এবং x, y, z গুণোত্তর শ্রেণী হয়, তবে প্রমাণ কর যে $x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=1$. [C. U. '44, '50 ; G. U. '49]

26. $\cdot 9+\cdot 99+\cdot 999+\cdots\cdots$, ইহার n পদের সমষ্টি কত ?

[C. U. (D. M. H.) '51]

27. $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\cdots\cdots$, ইহার n পদের সমষ্টি কত ? [C. U.]

28. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর n-তম, $2n$-তম ও $3n$-তম পদ যথাক্রমে x, y, z হইলে, প্রমাণ কর যে $y^2=xz$.

29. $(1)+(1+2)+(1+2+4)+\cdots\cdots$, ইহার n পদের সমষ্টি কত ?

30. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টি S, গুণফল P এবং পদগুলির অন্যোন্যকের সমষ্টি R হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\left(\frac{S}{R}\right)^n=P^2$. [C. U. 1883]

31. a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী। x ও y যথাক্রমে a ও b-এর এবং b ও c-এর সমান্তরীয় মধ্যক। প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$ এবং $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}$.

[P. U. 1892]

32. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর n, $2n$ ও $3n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে s_1, s_2, s_3 হইলে প্রমাণ কর যে $s_1(s_3-s_2)=(s_2-s_1)^2$.

Harmonic Progression (বিপরীত প্রগতি)

15. সংজ্ঞা : যদি কোন শ্রেণীর (series) অন্তর্গত রাশিগুলির অন্যোন্যকগুলি (reciprocals) সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে ঐ শ্রেণীটি (রাশিগুলি) বিপরীত প্রগতিতে (In Harmonic Progression) আছে বলা হয়।

যথা, $a, \ b, \ c, \ d, \ldots\ldots$ শ্রেণীটি বিপরীত প্রগতিতে থাকিবে, যদি $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots\ldots$ একটি সমান্তর শ্রেণী হয়।

Harmonic (বা Harmonical) Progression-কে সংক্ষেপে H.P. লেখা হয়, সুতরাং বিপরীত প্রগতিকে সংক্ষেপে বিঃ প্রঃ লেখা যাইতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত : মনে কর, a, b, c পদ তিনটি বিপরীত প্রগতির তিনটি ক্রমিক পদ।

অতএব, এখানে $\frac{1}{a}, \ \frac{1}{b}, \ \frac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণীর তিনটি ক্রমিক পদ,

$\therefore \ \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b} \cdots$(A), বা, $\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$, বা, $\frac{a-b}{b-c}=\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c} \ldots(1)$

আবার, (A) হইতে পাই $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \cdots (2)$

এবং $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{a+c}{ac}, \quad \therefore \quad b=\frac{2ac}{a+c} \cdots (3)$

এক্ষণে (1) হইতে এই সংজ্ঞা করা যায় যে, তিনটি রাশি বিপরীত প্রগতিতে থাকে, যদি প্রথম রাশি ও তৃতীয় রাশির অনুপাত প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরের সহিত দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির অন্তরের অনুপাতের সমান হয়।

[**দ্রষ্টব্য :** $a, \ a+b, \ a+2b, \ldots$ ইত্যাদি যদি একটি সমান্তর শ্রেণী হয়, তবে $\frac{1}{a}, \ \frac{1}{a+b}, \ \frac{1}{a+2b}, \ldots$ ইত্যাদি বিঃ প্রঃ হইবে।

আবার $a, a+b, a+2b, \ldots$ শ্রেণীর n-তম পদ $a+(n-1)b$.

অতএব, বিঃ প্রঃ-এর n-তম পদ $=\frac{1}{a+(n-1)b}$.]

বিপরীত প্রগতির মধ্যক

তিনটি রাশি বিপরীত প্রগতিতে থাকিলে মধ্যের রাশিটিকে অন্য দুইটির বিপরীত মধ্যক (Harmonic mean) বলে। যথা, a, b ও c বিঃ প্রগতির তিনটি ক্রমিক পদ হইলে a ও c-এর বিপরীত মধ্যক b হইবে।

অনুরূপে দেখ, আমরা দেখিয়াছি যে a, b, c বিঃ প্রগতির তিনটি ক্রমিক পদ হইলে $b=\frac{2ac}{a+c}$ হয়।

অতএব, এখানে দুইটি পদের সহিত তাহাদের মধ্যকটির সম্বন্ধ পাওয়া গেল।

দ্বিঘাত সহসমীকরণ

(দুইটি অজ্ঞাত রাশি)

16. দুইটি অজ্ঞাত রাশির মান বাহির করিতে হইলে দুইটি সমীকরণ দরকার। এই দুইটি সমীকরণের একটি একঘাত এবং অপরটি দ্বিঘাত হইলে, ইহার সমাধান এক এক প্রকারে হয়। কতিপয় সমাধান দেখান হইতেছে।

উদাহরণমালা 11

উদা. 1. সমাধান কর: $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ xy=6 \end{array}\right\}$

[**প্রথম প্রণালী**] $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=25-4\times 6=25-24=1$

$\therefore\quad x-y=\pm 1.$

এখন, $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ $\therefore$ যোগ করিয়া $2x=6$, $\therefore x=3$, $\therefore y=5-3=2.$

আবার, $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$ $\therefore$ যোগ করিয়া $2x=4$, $\therefore x=2$, $\therefore y=3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right\}$.

[**দ্বিতীয় প্রণালী**] প্রথম সমীকরণ হইতে $x=5-y$.

এখন x-এর মান $5-y$ দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া পাই $y(5-y)=6.$

বা, $5y-y^2=6$, বা, $y^2-5y+6=0$,

বা, $(y-2)(y-3)=0$, $\therefore y=2$, বা, $3.$

অতএব প্রথম সমীকরণ হইতে যখন $y=2$, তখন $x=5-2=3$,

এবং " " " " $y=3$, তখন $x=5-3=2.$

$\therefore$ সমাধান হইল $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right\}$.

[**দ্রষ্টব্য :** এই প্রকারে যে-কোন সমীকরণের সমাধান করা যায়। অতএব, ছাত্রদের এই দ্বিতীয় প্রকারেই অভ্যাস করা দরকার। সুবিধামত কোন সময় x-এর মান বা কোন সময় y-এর মান একটি হইতে বাহির করিয়া অপরটিতে বসাইতে হইবে।]

উদা. 2. সমাধান কর: $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{array}\right\}$

$\because\ x+y=7$, $\therefore\ x=7-y\cdots$(i)

দ্বিতীয় সমীকরণে x-এর এই মান বসাইয়া পাই $(7-y)^2+y^2=25$,

বা, $2y^2-14y+49=25$, বা, $2y^2-14y+24=0$,

বা, $y^2-7y+12=0$, বা, $(y-3)(y-4)=0$,

$\therefore$ $y=3$, বা, 4. $\therefore$ (i) হইতে পাই $x=4$, বা, 3.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=4\end{array}\right\}$ বা, $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=3\end{array}\right\}$.

উদা. 3. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}x-2y+4=0\\3y^2-2x^2=19\end{array}\right\}$

প্রদত্ত প্রথম সমীকরণ হইতে $x=2y-4$.

x-এর ঐ মান দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$3y^2-2(2y-4)^2=19, \quad \text{বা}, \quad -5y^2+32y-32=19,$$

বা, $5y^2-32y+51=0$, [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $5y^2-15y-17y+51=0$, বা, $(y-3)(5y-17)=0$.

$\therefore$ $y=3$ বা $\frac{17}{5}$, $\therefore$ প্রথম সমীকরণ হইতে $x=2$, বা, $\frac{14}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$ বা, $\left.\begin{array}{l}x=\frac{14}{5}\\y=\frac{17}{5}\end{array}\right\}$.

উদা. 4. সমাধান কর : $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}$, $x+y=10$. [C. U. '38]

প্রথম সমীকরণ হইতে, $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}$, বা, $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}$,

বা, $\frac{10}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}$ [$\because$ $x+y=10$] বা, $5\sqrt{xy}=20$ বা, $\sqrt{xy}=4$,

$\therefore$ $xy=16$, বা, $x(10-x)=16$ [$\because$ $y=10-x$ দ্বিতীয় সমীকরণে]

বা, $10x-x^2=16$, বা, $x^2-10x+16=0$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $(x-2)(x-8)=0$, $\therefore$ $x=2$ বা, 8.

এক্ষণে, দ্বিতীয় সমীকরণে $x=2$ হইলে $y=8$, এবং $x=8$ হইলে $y=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=8\end{array}\right\}$ বা, $\left.\begin{array}{l}x=8\\y=2\end{array}\right\}$.

উদা. 5. সমাধান কর : $x+y=a+b$, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2$. [C. U. '32]

প্রথম সমীকরণ হইতে $y=a+b-x$, এই মান দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{a+b-x}=2, \quad \text{বা}, \quad \frac{a^2+ab-ax+bx}{x(a+b-x)}=2,$$

বা, $a^2+ab-ax+bx=2ax+2bx-2x^2$,

বা, $2x^2-3ax-bx+a^2+ab=0$, বা, $2x^2-(3a+b)x+a(a+b)=0$,

বা, $2x^2-2ax-(a+b)x+a(a+b)=0$,

বা, $2x(x-a)-(a+b)(x-a)=0$, বা, $(x-a)\{2x-(a+b)\}=0$,

$\therefore\ x-a=0$ বা, $2x-(a+b)=0$, $\therefore\ x=a$, বা, $\frac{a+b}{2}$.

এক্ষণে, প্রথম সমীকরণ হইতে, যখন $x=a$, তখন $y=b$ এবং

যখন $x=\frac{a+b}{2}$, তখন $y=\frac{a+b}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{array}{r}x=a\\ y=b\end{array}\right\}$ বা, $x=y=\frac{a+b}{2}$.

উদা. 6. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}x+\frac{4}{y}=1\cdots(1)\\ y+\frac{4}{x}=25\cdots(2)\end{array}\right\}$ [C. U. '40]

(1) হইতে $xy+4=y\cdots(3)$ এবং (2) হইতে $xy+4=25x\cdots(4)$

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে পাই $y=25x\ldots(5)$

এক্ষণে, (3)-এ y-এর স্থানে $25x$ বসাইয়া পাই, $25x^2+4=25x$,

বা, $25x^2-25x+4=0$, বা, $(5x-1)(5x-4)=0$, $\therefore\ x=\frac{1}{5}$ বা $\frac{4}{5}$.

এক্ষণে, (5) হইতে $y=25x=25\times\frac{1}{5}$ বা, $25\times\frac{4}{5}=5$ বা, 20.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{1}{5}$, $y=5$; বা, $x=\frac{4}{5}$, $y=20$.

উদা. 7. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\cdots 1)\\ x+y=9\cdots(2)\end{array}\right\}$ [C. U. '36]

সমীকরণ (1) হইতে পাই $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2}$, সুতরাং $\frac{9}{xy}=\frac{1}{2}$ [$\because\ x+y=9$]

$\therefore\ xy=18$. $\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=81-72=9$,

$\therefore\ x-y=\pm 3$. এক্ষণে, $\left.\begin{array}{r}x+y=9\\ x-y=3\end{array}\right\}$

(যোগ) $2x=12$, $\therefore\ x=6$.

সুতরাং (2) হইতে পাই $y=9-6=3$.

আবার $\left.\begin{array}{r}x+y=9\\ x-y=-3\end{array}\right\}$

(যোগ) $2x=6$, $\therefore\ x=3$, সুতরাং $y=9-3=6$.

$\therefore\ \left.\begin{array}{r}x=6\\ y=3\end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{r}x=3\\ y=6\end{array}\right\}$.

উদা. 8. সমাধান কর : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots(1), \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1\cdots(2)$ [C. U. '25]

$\because \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$

$\therefore \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+(1)^2=2\times 1$ [প্রদত্ত সমীকরণ হইতে]

বা, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=1, \quad \therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\pm 1.$

এক্ষণে, $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1\end{array}\right\}$ যোগ করিয়া $\frac{2x}{a}=2, \quad \therefore x=a$;
এবং বিয়োগ করিয়া $\frac{2y}{b}=0, \quad \therefore y=0$;

অথবা, $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=-1\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\ \ 1\end{array}\right\}$ যোগ করিয়া $\frac{2x}{a}=0, \quad \therefore x=0$;
এবং বিয়োগ করিয়া $\frac{2y}{b}=-2, \quad \therefore y=-b.$

$\therefore$ সমাধান হইল $\left.\begin{array}{l}x=a\\y=0\end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=-b\end{array}\right\}.$

উদা. 9. সমাধান কর : $x+y=3\cdots(1),$ [C. U. '20]
$2x^2-5xy+2y^2=0\cdots(2).$

সমীকরণ (2) হইতে $2x^2-4xy-xy+2y^2=0,$

বা, $(2x-y)(x-2y)=0, \quad \therefore$ হয় $2x-y=0$ অথবা, $x-2y=0,$

এখন, $\left.\begin{array}{l}x+y=3\\2x-y=0\end{array}\right\}$ যোগ করিয়া $3x=3, \quad \therefore x=1, \quad \therefore y=3-1=2.$

আবার, $\left.\begin{array}{l}x+y=3\\x-2y=0\end{array}\right\}$ বিয়োগ করিয়া $3y=3, \therefore y=1, \quad \therefore x=2.$

$\therefore$ সমাধান হইল $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=1\end{array}\right\}.$

উদা. 10. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}x^y=y^2\cdots(1)\\y^{2y}=x^4\cdots(2)\end{array}\right\}$ [B.U.E. '63 ; C.U. '41, '45]

(2) হইতে পাই $(y^2)^y=x^4$. এখন (1) হইতে পাই

$x^y=y^2$, বা, $(x^y)^y=(y^2)^y$, বা, $(x)^{y^2}=(y)^{2y}=x^4, \therefore y^2=4, \quad \therefore y=\pm 2.$

যদি $y=2$ হয়, তবে (1) হইতে পাই $x^2=2^2=4, \quad \therefore x=\pm 2$

যদি $y=-2$ হয়, তবে (1) হইতে পাই $(x)^{-2}=(-2)^2=4$, বা, $\frac{1}{x^2}=4,$

বা, $x^2=\frac{1}{4}, \quad \therefore x=\pm\frac{1}{2}.$

$\therefore$ সমাধান হইল $x=\pm 2, \quad y=2$; অথবা, $x=\pm\frac{1}{2}, \quad y=-2.$

Exercise 10

সমাধান কর :

1. $x+y=12, xy=35.$

2. $x+y=7, x^2+y^2=29.$

3. $x-y=2, x^2+3y^2=28.$

4. $x+y=\frac{5}{6}, \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1.$ [C. U. '37]

5. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3}, x+y=10.$ [C. U. '47]

6. $x^2+y^2=a, x+2y=1.$ [C. U. '29]

7. $(x+a)(y+b)=c^2, x+y=a+b.$ [C. U. '30]

8. $xy+x+y=27, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2},$ [C. U. '39]

9. $x^3+y^3=9, x+y=3.$

10. $(x-2)(y+3)=5, xy=6.$

11. $x+\frac{3}{y}=1, y+\frac{3}{x}=16.$

12. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{10}{9}, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}.$

13. $3x-y=8, y^2-8x=9.$

14. $x^2+y^2=41, xy=20.$

15. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}, x+y=9.$

16. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2, x+y=3.$

17. $y^x=4, y^2=2^x.$

18. $4^x=2^y, (27)^{xy}=9^{y+1}.$ [C. U. '22]

19. $x^2+y^2=1, 3x+4y=5.$

20. $x^2+xy=28, x-y=1.$

21. $\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}&=\frac{9}{2}\\ \frac{1}{x+y}&=\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}$ [C U. '52]

22. $x+\frac{4}{y}=1, y+\frac{4}{x}=25.$ [H. S. '63 ; C. U. '40]

23. $2x^2+3xy+4y^2=24, x+3y=7.$ [C. U. '16]

24. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18, x+y=12.$ [C. U. '19]

25. $x^3-y^3=218, x-y=2.$ [C. U. 17]

26. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=5, \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1.$

27. $x+y-\sqrt{xy}=7, x^2+y^2+xy=133.$ [C. U. '51]

28. $(x-a)(y-b)=ab, \frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$ [C. U. '34]

29. $3^x=9^y, 5^{x+y+1}=25^{xy}.$ [C. U. '46]

30. $8.2^{xy}=4^y, 9^x.3^{xy}=\frac{1}{27}.$ [C. U. '42]

লগারিদ্‌ম্ (Logarithm)

1. আমরা জানি $2^3=8$, 2-কে বলা হয় নিধান (base) এবং 3-কে বলা হয় 2-এর ঘাতের (power) সূচক (index)। তাহা হইলে 3-এর সহিত 8-এর কি সম্পর্ক? আমরা বলিব 3, 8-এর লগারিদ্‌ম্ যখন নিধান 2, ইহা ইংরাজীতে বলা হয় 3 is the logarithm of 8 to the base 2. ইহা সংক্ষেপে লিখা হয় এই ভাবে $3=\log_2 8$. সেইরূপে, যেহেতু $3^2=9$. $\therefore\ 2=\log_3 9$. সাধারণতঃ যদি $a^x=\text{M}$ হয়, তবে $x=\log_a\text{M}$ হয়।

বিপরীতক্রমে যদি $x=\log_a\text{M}$ হয়, তবে $a^x=\text{M}$ হয়।

16. **সংজ্ঞা :** কোন নিধানকে কোন ঘাতে উন্নীত করিলে যে রাশির সহিত সমান হয়, ঐ ঘাতের সূচককে ঐ রাশির প্রদত্ত নিধানের জন্য লগারিদ্‌ম্ বলে।

2. **কতিপয় সূত্র :—**

(a) $\log_a(\text{MN})=\log_a\text{M}+\log_a\text{N}$

(b) $\log_a\left(\dfrac{\text{M}}{\text{N}}\right)=\log_a\text{M}-\log_a\text{N}$

(c) $\log_a\text{M}^n=n\log_a\text{M}$, (d) $\log_a\text{M}=\log_b\text{M}\times\log_a b$.

সূত্রগুলির প্রমাণ :—

(a) মনে করা যাক, $x=\log_a\text{M}$ এবং $y=\log_a\text{N}$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore\ \ a^x=\text{M}\ldots\ldots(1)\\ \text{এবং}\ \ a\ =\text{N}\ldots\ldots(2)\end{array}\right\}$$

(1) ও (2) গুণ করিয়া পাই $a^x.a^y=\text{MN}$, বা, $a^{x+y}=\text{MN}$,

$\therefore\ \log_a(\text{MN})=x+y=\log_a\text{M}+\log_a\text{N}$.

অনুসিদ্ধান্ত : $\log_a(xyz\ldots)=\log_a x+\log_a y+\log_a z+\cdots$

(b) মনে করা যাক, $x=\log_a\text{M}$ এবং $y=\log_a\text{N}$.

$\therefore\ a^x=\text{M}$ এবং $a^y=\text{N}$.

এখন ভাগ করিয়া $\dfrac{a^x}{a^y}=\dfrac{\text{M}}{\text{N}}$, বা, $a^{x-y}=\dfrac{\text{M}}{\text{N}}$

$\therefore\ \log_a\left(\dfrac{\text{M}}{\text{N}}\right)=x-y=\log_a\text{M}-\log_a\text{N}$.

(c) $\log_a\text{M}^n=\log_a(\text{M. M. M}\ldots n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$=\log_a\text{M}+\log_a\text{M}+\log_a\text{M}+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=n\log_a\text{M}$.

(d) মনে কর যে, $x=\log_a M$ এবং $y=\log_b M$.

$\therefore$ $a^x=M$ এবং $b^y=M$, $\therefore$ $a^x=b^y$, বা, $a^{\frac{x}{y}}=b$,

$\therefore$ $\frac{x}{y}=\log_a b$, $\therefore$ $x=y\log_a b$.

$\therefore$ $\log_a M=\log_b M\times\log_a b$.

[দ্রষ্টব্যঃ এই সূত্র দ্বারা নিধান পরিবর্তন করা হইয়াছে।]

অনুসিদ্ধান্ত : এই সূত্রে $M=a$ ধরিলে $\log_b a\times\log_a b=1$.

লগারিদম্-এর তত্ত্বাবলী :—

(i) আমরা জানি $a^0=1$, $\therefore$ $\log_a 1=0$,

$\therefore$ (0 ভিন্ন) যে কোন নিধানের পক্ষে একের লগারিদম্ শূন্য হইবে।

(ii) $a^1=a$, $\therefore$ $\log_a a=1$.

$\therefore$ যাহা নিধান তাহারই লগারিদম্ সর্বদা 1 হইবে।

3. সাধারণ লগারিদম্ (Common logarithm).

যদি নিধান 10 হয়, তবে লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম্ বলে।

কোন লগারিদমে নিধানটি লেখা না থাকিলে বুঝিতে হইবে যে, নিধান 10 আছে। অর্থাৎ log 285 বলিলে $\log_{10}285$ বুঝিতে হইবে।

4. পূর্ণক এবং অংশক (Characteristic and Mantissa)

$10^0=1$ $\therefore$ $\log 1=0$

$10^1=10$ $\therefore$ $\log 10=1$

$10^2=100$ $\therefore$ $\log 100=2$

$10^3=1000$ $\therefore$ $\log 1000=3$

$10^4=10{,}000$ $\therefore$ $\log 10{,}000=4$

এখন দেখা যাইতেছে যে, 11 হইতে 99-এর মধ্যে যে কোন রাশির লগারিদম্ 1 অপেক্ষা বড় এবং 2 অপেক্ষা ছোট অর্থাৎ 1+দশমিকাংশ।

তদ্রূপ, 101 হইতে 999-এর মধ্যে যে কোন রাশির লগারিদম্ 2 হইতে বড় এবং 3 হইতে ছোট অর্থাৎ 2+দশমিকাংশ।

তাহা হইলে বুঝা যাইতেছে, কোন রাশির লগারিদম্ যে পূর্ণ সংখ্যা হইবেই তাহার কোন স্থিরতা নাই। ইহার কিছু পূর্ণ অংশ কিছু দশমিকাংশ থাকিতে পারে। এই পূর্ণ অংশের নাম পূর্ণক (Characteristic) এবং দশমিকাংশের নাম অংশক (Mantissa)।

আরও দেখা যাইতেছে যে, 2 হইতে 9 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদ্‌মের পূর্ণক 0 ; 11 হইতে 99 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদ্‌মের পূর্ণক 1 ; 101 হইতে 999 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদ্‌মের পূর্ণক 2 ; 1001 হইতে 9999 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদ্‌মের পূর্ণক 3, অর্থাৎ কোন রাশির পূর্ণ অংশে অঙ্কসংখ্যা যত তাহা হইতে 1 কম হইবে উহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক।

5. আবার $10^{-1}=\frac{1}{10}=\cdot 1 \qquad \therefore \log \cdot 1=-1$

$10^{-2}=\frac{1}{100}=\cdot 01 \qquad \therefore \log \cdot 01=-2$

$10^{-3}=\frac{1}{1000}=\cdot 001 \qquad \therefore \log \cdot 001=-3$

মনে কর যে, $\log \cdot 03$ বাহির করিতে হইবে।

এখন যেহেতু $\cdot 01<\cdot 03<\cdot 1, \quad \therefore \log \cdot 01<\log \cdot 03<\log \cdot 1$

অর্থাৎ $\log \cdot 03$, -2 অপেক্ষা বড় এবং -1 অপেক্ষা ছোট হইবে,

$\therefore \log \cdot 03=-2+$ দশমিকাংশ,

ইহার পূর্ণক ঋণাত্মক অর্থাৎ -2 এবং অংশক ধনাত্মক।

এখানে দেখ, দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে যতগুলি শূন্য থাকিবে সেই শূন্য সংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশী পূর্ণক হইবে এবং তাহা ঋণাত্মক হইবে।

উদা. (i) $\log \cdot 234=-1+$ একটি দশমিক ভগ্নাংশ, এখানে পূর্ণক -1

(ii) $\log \cdot 0234=-2+$ " " ", এখানে পূর্ণক -2

(iii) $\log \cdot 00234=-3+$ " " ", এখানে পূর্ণক -3

[**দ্রষ্টব্য :** অংশক সর্বক্ষেত্রেই ধনাত্মক হইবে।]

6. পূর্ণক বাহির করিবার নিয়ম

(i) যদি রাশিটি 1 হইতে বড় হয়, তবে

রাশির পূর্ণ অংশে যতগুলি অঙ্ক থাকিবে তাহা অপেক্ষা 1 কম হইবে উহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক।

(ii) যদি রাশিটি 1 হইতে ছোট হয়, তবে

দশমিক বিন্দু হইতে প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে যতগুলি শূন্য থাকিবে, তাহা অপেক্ষা 1 বেশী হইবে লগারিদ্‌মের পূর্ণক এবং তাহা ঋণাত্মক হইবে।

7. অংশক (Mantissa) বাহির করিবার নিয়ম।

পুস্তকের শেষে লগ তালিকাটি (log table-টি) দেখ। উহাতে দশমিক 4-অঙ্ক পর্যন্ত কতিপয় সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ দেওয়া আছে।

ঐ তালিকার প্রথম স্তম্ভের নীচে নীচে মোটা অক্ষরে লেখা আছে 10 হইতে 99 পর্যন্ত। তালিকার মাথার উপরে মাঝারি অক্ষরে 0 হইতে 9 পর্যন্ত এবং তারও পরে ছোট অক্ষরে 1 হইতে 9 পর্যন্ত লেখা আছে। এই মাথার সারির নীচে এবং বামের মোটা সংখ্যার ডান দিকের সারিতে প্রতি ঘরে যে সব সংখ্যা আছে তাহা মোটেই পূর্ণ সংখ্যা নহে। প্রতিটি সংখ্যার আগে দশমিক বিন্দু আছে ধরিয়া লইতে হইবে, অর্থাৎ যদি থাকে 0043, তাহা হইলে বুঝিবে উহা ·0043, ইত্যাদি।

এখন লগ তালিকা হইতে কি প্রকারে কোন সংখ্যার লগের অংশক বাহির করা যায় তাহা বোঝান যাইতেছে।

(*i*) মনে করা যাক, 37-এর লগের অংশক বাহির করিতে হইবে :—

প্রথম স্তম্ভের 37-এর পরই মাথার উপরে 0-এর স্তম্ভের নীচে আছে 5682. এখন 37-এর লগের অংশক হইবে ·5682.

(*ii*) 374-এর লগের অংশক দেখিতে হইলে 37-এর পর সোজা ডান দিকের সারিতে আঙুল লইয়া গিয়া থামিতে হইবে সেই ঘরে যে ঘরের মাথার উপরে আছে 4. সেখানে সংখ্যা লেখা আছে 5729 ; সুতরাং 374-এর লগের অংশক হইতে ·5729.

(*iii*) 3746 অর্থাৎ 4 অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার লগের অংশক।

প্রথম তিনটি অঙ্ক 374-এর লগের উপরোক্ত নিয়মে অংশক ·5729 হইল। সংখ্যাটির চতুর্থ অঙ্ক 6, সেইজন্য 37-এর পর সোজা ডান দিকের শেষে যে ছোট হরফে 1 হইতে 9 পর্যন্ত আছে তাহার 6-এর স্তম্ভের নীচে লেখা আছে 7 অর্থাৎ ·0007. এখন ·0007 এবং ·5729 যোগ করিলে পাওয়া যায় ·5736, ইহাই 3746-এর লগের অংশক।

[**দ্রষ্টব্য ঃ** 3746-এর লগের পূর্ণক 3 এবং অংশক ·5736,

$\log 3746 = 3{\cdot}5736.$

তদ্রূপ $\log 37 = 1{\cdot}5682$ এবং $\log 374 = 2{\cdot}5729.$]

8. যে সব সংখ্যার অঙ্কগুলি সমান এবং একই ভাবে সাজান আছে শুধু দশমিক বিন্দুর স্থান পৃথক্‌, তাহাদের সকলেরই লগের অংশক সমান।

আমরা বাহির করিয়াছি $\log 3746 = 3{\cdot}5736$

এখন $\log 374{\cdot}6 = \log \frac{3746}{10}$

$$= \log 3746 - \log 10 = 3{\cdot}5736 - 1 = 2{\cdot}5736$$

$\log 37{\cdot}46 = \log \frac{3746}{100}$

$$= \log 3746 - \log 100 = 3{\cdot}5736 - 2 = 1{\cdot}5736$$

$\log 3{\cdot}746 = \log \frac{3746}{1000}$

$= \log 3746 - \log 1000 = 3{\cdot}5736 - 3 = {\cdot}5736$

$\log {\cdot}3746 = \frac{3746}{10000}$

$= \log 3746 - \log 10000 = 3{\cdot}5736 - 4$

$= 3 + {\cdot}5736 - 4 = {\cdot}5736 - 1 = \bar{1}{\cdot}5736.$

[দ্রষ্টব্য : $\log {\cdot}3746$-এর পূর্ণক -1 এবং অংশক ·5736.

ইহা $-1{\cdot}5736$ লিখিলে বোঝা যায় যে 1·5736 সমস্তটাই ঋণাত্মক। কিন্তু অংশক ঋণাত্মক নয়, শুধু পূর্ণক ঋণাত্মক। শুধু পূর্ণক ঋণাত্মক ইহা বুঝাইবার জন্য 1-এর মাথার উপর একটি রেখা টানিয়া দিয়া পরে দশমিক বিন্দু এবং অংশক লেখা হয়। এই রেখাকে বলা হয় Bar অর্থাৎ $\bar{1}$ হইল bar 1, $\bar{2}$ হইল bar 2 ইত্যাদি। এখানে $\bar{1}$ ও $\bar{2}$ ঋণাত্মক। উপরের প্রণালীতে 10, 20, 30 প্রভৃতির লগ হইতে 1, 2, 3 প্রভৃতির লগ নির্ণয় করা যায়। ঐগুলির লগারিদম্ তালিকায় নাই।]

9. Antilogarithm

কোন সংখ্যা m-এর যদি লগারিদম্ n হয়, তবে m-কে n-এর অ্যান্টিলগারিদম্ বলে। যথা,

$\log 37{\cdot}46 = 1{\cdot}5736$, $\therefore$ 1·5736-এর অ্যান্টিলগারিদম্ হইবে 37·46.

10. Antilogarithm বাহির করিবার নিয়ম।

Antilog table-এ প্রথম সারিতে দশমিক বিন্দুর পরে দুইটি অঙ্ক দেওয়া আছে। ইহা লগারিদমের অংশকের প্রথম দুইটি অঙ্ক।

(i) মনে কর, 1·5736-এর Antilogarithm বাহির করিতে হইবে। ইহার অংশক ·5736, কাজেই ·57-এর ডান দিকে এবং মাথার উপরে যে ঘরে 3 আছে সেইখানে সংখ্যা আছে 3741, এই রেখার আরও ডানদিকে 6-এর নীচে আছে 5; এই 5 কে 3741-এর সহিত যোগ করিলে পাওয়া যায় 3746.

$\therefore$ ·5736 এই অংশকের জন্য পাওয়া গেল 3746; যেহেতু 1·5736-এর পূর্ণক 1, $\therefore$ ইহা যে সংখ্যার লগারিদম্ তাহার পূর্ণ সংখ্যায় দুইটি অঙ্ক আছে।

$\therefore$ 1·5736-এর Antilogarithm 37·46 হইল।

তদ্রূপ 2·5736-এর Antilogarithm 374·6

এবং $\bar{2}{\cdot}5736$-এর Antilogarithm ·03746.

(ii) $-{\cdot}5378$-এর অ্যান্টিলগ কত?

$\because$ $-{\cdot}5378 = -1 + 1 - {\cdot}5378 = -1 + {\cdot}4622 = \bar{1}{\cdot}4622$,

$\therefore$ $-{\cdot}5378$-এর অ্যান্টিলগ $= \bar{1}{\cdot}4622$-এর অ্যান্টিলগ $= {\cdot}2898$.

উদাহরণমালা

উদা. 1. লগারিদম্ নির্ণয় কর : (*a*) 78, (*b*) 324, (*c*) 1·362 এবং (*d*) ·035.

(*a*) 78 সংখ্যাটি দুই অঙ্কের বলিয়া উহার লগের পূর্ণক হইবে 1. এক্ষণে লগ তালিকা হইতে লগ 78-এর অংশক নির্ণয়ের জন্য লগ 78 = 780 ধরিবে। ঐ তালিকার 78-এর পর মাথায় 0-র স্তম্ভের নীচে 8921 সংখ্যাটি আছে, সুতরাং অংশকটি হইল ·8921.

$\therefore$ log 78 = 1·8921.

(*b*) 324-এর অঙ্কসংখ্যা তিন, সুতরাং উহার লগের পূর্ণক হইবে 2. এক্ষণে লগ তালিকায় 32-এর ডান দিকে মাথায় 4-এর স্তম্ভের নীচে সংখ্যা লেখা আছে 5105.

$\therefore$ log 324 = 2·5105.

(*c*) 1·362-এর পূর্ণ সংখ্যায় একটি অঙ্ক থাকায় উহার লগের পূর্ণক হইবে 0. লগ তালিকায় 13-এর ডানদিকে মাথার প্রথম 6-এর স্তম্ভের নীচে 1335 সংখ্যাটি পাইলাম, ঐ লাইনে আরও ডানদিকে 2-এর স্তম্ভের নীচে আছে 7. 1335 + 7 = 1342.

$\therefore$ log 1·362 = ·1342.

(*d*) ·035 সংখ্যাটিতে প্রথমেই দশমিকের পর একটি শূন্য থাকায় উহার লগের পূর্ণকটি ঋণাত্মক 2 অর্থাৎ $\bar{2}$ হইবে। এক্ষণে লগ তালিকা হইতে দেখা যায় লগ 35-এর অংশক = ·5441.

$\therefore$ log ·035 = $\bar{2}$·5441.

উদা. 2. লগ তালিকা সাহায্যে (*a*) $\bar{1}$·2463 ও (*b*) − 2·3254-এর অ্যান্টিলগ নির্ণয় কর।

(*a*) $\bar{1}$·2463-এর অংশক ·2463 ; অ্যান্টিলগ তালিকায় ·24-এর ডানদিকে এবং মাথার উপরে যে ঘরে 6 আছে তার নীচে সংখ্যা আছে 1762, এই রেখার আরও ডানদিকে 3-এর স্তম্ভের নীচে আছে 1; 1762-এর সহিত ঐ 1 যোগ করিয়া হইল 1763.

$\therefore$ ·2463 এই অংশকের জন্য পাওয়া গেল ·1763 ;

$\because$ $\bar{1}$·2463-এর পূর্ণক $\bar{1}$,

$\therefore$ ইহা যে সংখ্যার লগ তাহাতে পূর্ণ সংখ্যা নাই এবং তাহার দশমিকের পর প্রথম অঙ্কটি সার্থক অঙ্ক।

$\therefore$ $\bar{1}$·2463-এর নির্ণেয় অ্যান্টিলগ = ·1763.

(b) $-2{\cdot}8254=-3+1-{\cdot}8254=-3+{\cdot}1746=\bar{3}{\cdot}1746$;

য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে দেখা যায় ·1746-এর য়্যান্টিলগ = ·1495 ;

এখানে পূর্ণক 3টি ঋণাত্মক, সুতরাং নির্ণেয় Antilog-এ দশমিকের পর দুইটি শূন্য দিয়া সংখ্যাটি আরম্ভ হইবে।

∴ নির্ণেয় Antilog = ·001495.

উদা. 3. লগ তালিকা সাহায্যে $\frac{1}{(1{\cdot}045)^{20}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[P. U. '50]

মনে কর $x=\frac{1}{(1{\cdot}045)^{20}}$,

$$\therefore \log x=\log\frac{1}{(1{\cdot}045)^{20}}=\log 1-\log(1{\cdot}045)^{20}$$

$$=\log 1-20\log 1{\cdot}045=0-20\times{\cdot}0191=-{\cdot}382$$

$$=-1+1-{\cdot}382=-1+{\cdot}618=\log{\cdot}4150$$

(য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে)

∴ $x={\cdot}415$, অতএব নির্ণেয় মান = ·415.

উদা. 4. লগ তালিকা সাহায্যে $\frac{\sqrt[5]{2{\cdot}415}}{(0{\cdot}824)^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

[P. U. 1948]

মনে কর $x=\frac{\sqrt[5]{2{\cdot}415}}{(0{\cdot}824)^4}$, ∴ $\log x=\log\frac{\sqrt[5]{2{\cdot}415}}{(0{\cdot}824)^4}$

$$=\log(2{\cdot}415)^{\frac{1}{5}}-\log({\cdot}824)^4$$

$$=\tfrac{1}{5}\log 2{\cdot}415-4\log{\cdot}824=\tfrac{1}{5}\times 0{\cdot}3829-4\times\bar{1}{\cdot}9159$$

$$={\cdot}0765+4-3{\cdot}6636={\cdot}4129$$

$$=\log 2{\cdot}587 \text{ (Antilog তালিকা হইতে)}$$

∴ $x=2{\cdot}587$, ∴ নির্ণেয় মান = 2·587.

উদা. 5. $\log x=2{\cdot}5785$ হইলে, x-এর মান নির্ণয় কর।

এখানে প্রদত্ত লগের পূর্ণকটি 2, সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যার অখণ্ডাংশ 3 অঙ্কের হইবে। এক্ষণে, পূর্ণক 2 ছাড়িয়া দিয়া প্রদত্ত অংশক ·5785-এর Antilog নির্ণয় করিতে হইবে। য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে পাই যে, যে সংখ্যার লগের অংশক ·5785 তাহার সার্থক অঙ্কগুলি 3788.

∴ $2{\cdot}5785=\log 378{\cdot}8$, ∴ $x=378{\cdot}8$.

উদা. 6. লগ তালিকা সাহায্যে $(1{\cdot}035)^{-16}$এর মান নির্ণয় কর।

মনে কর $x=(1{\cdot}035)^{-16}$

$\therefore\ \log x=\log(1{\cdot}035)^{-16}=-16\log 1{\cdot}035=-16\times{\cdot}0149$

$=-{\cdot}2384=-1+1-{\cdot}2384$

$=-1+{\cdot}7616=\bar{1}{\cdot}7616$

$=\log{\cdot}5776$ (Antilog তালিকা হইতে)

$\therefore\ x={\cdot}5776$, নির্ণেয় মান $={\cdot}5776$.

উদা. 7. $(6)^{25}$এ অঙ্ক সংখ্যা কত? দেওয়া আছে $\log 2={\cdot}3010$ ও $\log 3={\cdot}4771$.

$\log(6)^{25}=25\log 6=25\log(2\times 3)=25(\log 2+\log 3)$

$=25({\cdot}3010+{\cdot}4771)=25\times{\cdot}7781=19{\cdot}4525.$

$\because$ $\log(6)^{25}$এর পূর্ণক 19 পাওয়া গিয়াছে,

$\therefore$ $(6)^{25}$এ মোট 20টি অঙ্ক সংখ্যা আছে।

উদা. 8. 2^{-30}এর মানে কোন্ অঙ্কটি প্রথম সার্থক অঙ্ক?

দেওয়া আছে $\log 2={\cdot}3010$.

মনে কর $x=2^{-30}$

$\therefore\ \log x=\log 2^{-30}=-30\times\log 2=-30\times{\cdot}3010$

$=-9{\cdot}03=-10+1-{\cdot}03=\overline{10}{\cdot}97$

$\because$ লগ x-এর পূর্ণক $\overline{10}$

$\therefore$ প্রথমেই দশমিকের পর শূন্য সংখ্যা $=10-1=9$.

$\therefore$ দশম অঙ্কটি হইবে প্রথম সার্থক অঙ্ক।

উদা. 9. যদি $\log 2={\cdot}3010300$ এবং $\log 13=1{\cdot}1139434$ হয়, তবে $\log 65$ কত হইবে?

$\log 65=\log(5\times 13)=\log 5+\log 13=\log\frac{10}{2}+\log 13$

$=\log 10-\log 2+\log 13=1-{\cdot}3010300+1{\cdot}1139434$

$=1{\cdot}8129134.$

উদা. 10. নিধান $2\sqrt{3}$ হইলে 144-এর লগারিদম্ কত?

মনে কর, নির্ণেয় লগারিদম্ $=x$.

$\therefore\ (2\sqrt{3})^x=144=16\times 9=2^4\times(3)^2=2^4\times(\sqrt{3})^4=(2\sqrt{3})^4,$

$\therefore\ x=4,\ \therefore$ নির্ণেয় লগারিদম্ $=4$.

উদা. 11. প্রমাণ কর যে, $7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2.$

[C. U. 1936]

$7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}$

$=7\{\log 16-\log 15\}+5\{\log 25-\log 24\}+3\{\log 81-\log 80\}$

$=7\{\log 2^4-\log(3\times 5)\}+5\{\log 5^2-\log(3\times 2^3)\}+$

$3\{\log 3^4-\log(5\times 2^4)\}$

$=7\{4\log 2-\log 3-\log 5\}+5\{2\log 5-\log 3-3\log 2\}$

$+3\{4\log 3-\log 5-4\log 2\}$

$=28\log 2-7\log 3-7\log 5+10\log 5-5\log 3-15\log 2$

$+12\log 3-3\log 5-12\log 2$

$=28\log 2-27\log 2-12\log 3+12\log 3-10\log 5+10\log 5$

$=28\log 2-27\log 2=\log 2.$

উদা. 12. $\log 2=\cdot 3010$, $\log 3=\cdot 4771$, $\log 7=\cdot 8451$ এবং $\log 203\cdot 9=2\cdot 3095$ হইলে $\sqrt[5]{35\cdot 28}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$35\cdot 28=\frac{2^3\times 3^2\times 7^2}{10^2}\text{ ; মনে কর, } x=\sqrt[5]{35\cdot 28}$$

$$\therefore\ \log x=\log\ (35\cdot 28)^{\frac{1}{5}}=\log\left(\frac{2^3\times 3^2\times 7^2}{10^2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=\tfrac{1}{5}[3\log 2+2\log 3+2\log 7-2\log 10]$$

$$=\tfrac{1}{5}[3\times\cdot 3010+2\times\cdot 4771+2\times\cdot 8451-2\times 1]$$

$$=\tfrac{1}{5}[\cdot 9030+\cdot 9542+1\cdot 6902-2]$$

$$=\tfrac{1}{5}\times 1\cdot 5474=\cdot 3095\text{ (4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত)}$$

এখন যেহেতু $\log 203\cdot 9=2\cdot 3095$,

$\therefore\ \log 2\cdot 039=\cdot 3095=\log x,\qquad \therefore\ x=2\cdot 039.$

$\therefore\ \sqrt[5]{35\cdot 28}=2\cdot 039.$

উদা. 13. $\dfrac{\log x}{y-z}=\dfrac{\log y}{z-x}=\dfrac{\log z}{x-y}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $xyz=1.$

মনে করা যাক, $\dfrac{\log x}{y-z}=\dfrac{\log y}{z-x}=\dfrac{\log z}{x-y}=k.$

$\therefore\ \log x=k(y-z)$, $\log y=k(z-x)$ এবং $\log z=k(x-y)$,

$\therefore\ \log x+\log y+\log z=k(y-z+z-x+x-y)=k\times 0=0,$

$\therefore\ \log(xyz)=0=\log 1,\quad \therefore\ xyz=1.$

উদা. 14. গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত সংখ্যাগুলির লগারিদম্গুলি সমান্তর শ্রেণী হইবে।

মনে করা যাক, x, y, z গুণোত্তর শ্রেণী।

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{y}{z},\quad \therefore\ \log\frac{x}{y}=\log\frac{y}{z}$

$\therefore\ \log x-\log y=\log y-\log z$

$\therefore$ $\log x, \log y, \log z$ সমান্তরাল শ্রেণী হইল।

লগারিদ্মের প্রয়োগ

উদা. 1. লগ তালিকার সাহায্যে $\frac{32{\cdot}47\times 4{\cdot}8\times 873{\cdot}2}{523{\cdot}4\times{\cdot}04236\times 391}$ এর মান নির্ণয় কর।

মনে করা যাক $x=\frac{32{\cdot}47\times 4{\cdot}8\times 873{\cdot}2}{523{\cdot}4\times{\cdot}04236\times 391}$

$\therefore\ \log x=\{\log 32{\cdot}47+\log 4{\cdot}8+\log 873{\cdot}2\}$
$\qquad -\{\log 523{\cdot}4+\log{\cdot}04236+\log 391\}$

লগ তালিকা হইতে পাই :—

$\log 32{\cdot}47=1{\cdot}5114$
$\log 4{\cdot}8={\cdot}6812$
$\log 873{\cdot}2=2{\cdot}9411$
(যোগ) $5{\cdot}1337$
$3{\cdot}9379$
(বিয়োগ) $1{\cdot}1958$

$\log 523{\cdot}4=2{\cdot}7188$
$\log{\cdot}04236=\bar{2}{\cdot}6269$
$\log 391=2{\cdot}5922$
$3{\cdot}9379$

$\log x=1{\cdot}1958$, Antilog $1{\cdot}1958=15{\cdot}70$.

$\therefore\ x=15{\cdot}7.\quad \therefore$ নির্ণেয় মান $=15{\cdot}7$.

[দ্রষ্টব্য : x না ধরিয়া নিম্নোক্ত উপায়ে সমাধান করিলেই হইবে।]

উদা. 2. লগ তালিকার সাহায্যে $\frac{42{\cdot}36\times 3{\cdot}802\times{\cdot}524}{578{\cdot}3\times 8{\cdot}129}$ এর মান নির্ণয় কর।

লবগুলির লগ—

$\log 42{\cdot}36=1{\cdot}6269$
$\log 3{\cdot}802={\cdot}5800$
$\log{\cdot}524=\bar{1}{\cdot}7193$
$1{\cdot}9262$
$3{\cdot}6722$

হরগুলির লগ—

$\log 578{\cdot}3=2{\cdot}7621$
$\log 8{\cdot}129={\cdot}9101$
$3{\cdot}6722$

(বিয়োগ করিয়া) $\bar{2}{\cdot}2540$, Antilog $\bar{2}{\cdot}2540={\cdot}01795$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $={\cdot}01795$.

উদা. 3. 2 পা. 14 শি. 7 পে.-এর 1·231-এর মান কত (আসন্ন পেন্সে) ?

প্রদত্ত রাশি = 655 পে. × 1·231 = x মনে কর

$\therefore$ $\log x = \log 655 + \log 1{\cdot}231$

$= 2{\cdot}8162 + {\cdot}0902 = 2{\cdot}9064$ (লগ তালিকা হইতে)

$\therefore$ $x = 806{\cdot}1$ (য়্যান্টিলগ তালিকা হইতে)

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 806·1 পেন্স = 3 পা. 7 শি. 2 পে. (আসন্ন)।

উদা. 4. 2·7-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$\sqrt{2{\cdot}7} = (2{\cdot}7)^{\frac{1}{2}}$. এক্ষণে $\log (2{\cdot}7)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 2{\cdot}7 = \frac{1}{2} \times {\cdot}4314$

$= {\cdot}2157 = \log 1{\cdot}644$

$\therefore$ $(2{\cdot}7)^{\frac{1}{2}} = 1{\cdot}644$, $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল = 1·644 (প্রায়)।

উদা. 5. 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 3 বৎসরে 425 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হইবে (আসন্ন টাকায়) ?

সমূল চক্রবৃদ্ধি = আসল $\times \left(1 + \frac{\text{সুদের হার}}{100}\right)^{\text{বৎসরের সংখ্যা}}$

$= 425 \times (1 + \frac{4}{100})^3 = 425 \times (1{\cdot}04)^3$.

এক্ষণে $\log \{425 \times (1{\cdot}04)^3\} = \log 425 + 3 \log 1{\cdot}04$

$= 2{\cdot}6284 + {\cdot}0510 = 2{\cdot}6794$.

কিন্তু $2{\cdot}6794 = \log 477{\cdot}9$;

$\therefore$ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = 477·9 টা. = 478 টাকা (আসন্ন)।

উদা. 6. যদি 1 মিটার = 39·37 ইঞ্চি হয়, তবে এক বর্গমিটারে কত বর্গগজ হইবে ?

1 বর্গমিটার = $(39{\cdot}37)^2$ বর্গ ইঞ্চি।

$= \frac{(39{\cdot}37)^2}{144 \times 9}$ বর্গগজ $= \frac{(39{\cdot}37)^2}{1296}$ বর্গগজ।

এক্ষণে $\log \frac{(39{\cdot}37)^2}{1296} = 2 \log 39{\cdot}37 - \log 1296$

$= 2 \times 1{\cdot}5952 - 3{\cdot}1126 = {\cdot}0778$;

আবার Antilog $\cdot0778 = 1{\cdot}196$

$\therefore$ 1 বর্গমিটার = 1·196 বর্গগজ।

উদা. 7. লগ তালিকা সাহায্যে সমাধান কর :

$2^x = 3^y$ এবং $2^{y+1} = 3^{x-1}$. [C. U. '42]

সমীকরণ দুইটি হইতে লগ লইয়া পাই $x \log 2 = y \log 3 \ldots (1)$

এবং $(x-1) \log 3 = (y+1) \log 2 \ldots (2)$

এক্ষণে (1) ও (2)-এর গুণফলকে $\log 2 \times \log 3$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$x(x-1) = y(y+1)$, বা, $x^2 - y^2 = x + y$, বা, $x - y = 1$, বা $x = y + 1$.

$\therefore$ (2) হইতে পাই $(x-1) \log 3 = x \log 2$,

বা, $x \log 3 - \log 3 = x \log 2$ বা, $x(\log 3 - \log 2) = \log 3$,

$$\therefore \quad x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2} = \frac{\cdot 4771}{\cdot 4771 - \cdot 3010} = \frac{\cdot 4771}{\cdot 1761} = 2 \cdot 7 \text{ (প্রায়) ;}$$

আবার, $y = x - 1 = 2\cdot 7 - 1 = 1\cdot 7$ (প্রায়)।

Exercise 11

1. লগ তালিকার সাহায্যে নিম্নের সংখ্যাগুলির লগারিদম্ নির্ণয় কর :—

(i) 8 (ii) 88 (iii) 563 (iv) ·035

(v) ·1234 (vi) ·003256.

2. তালিকা সাহায্যে য়্যান্টিলগারিদম্ নির্ণয় কর :—

(i) ·1235 (ii) 1·362 (iii) 2·6748 (iv) $\bar{1}\cdot 2463$

(v) $-1\cdot 2463$ (vi) $\bar{2}\cdot 8254$ (vii) $-2\cdot 8254$.

3. $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 47712$ হইলে নিম্ন সংখ্যাগুলিতে অঙ্ক সংখ্যা কত ?

(i) 2^{17} (ii) 3^{20}

4. প্রমাণ কর :—

(i) $\log 2 + 16 \log \frac{16}{15} + 12 \log \frac{25}{24} + 7 \log \frac{81}{80} = 1.$ [C. U. '40]

(ii) $\log \frac{75}{15} - 2 \log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 2.$ [C. U. 1951]

(iii) $\log \frac{65}{14} + \log \frac{77}{143} = \log 5 - \log 2.$

5. $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $x^x y^y z^z = 1.$

6. প্রমাণ কর যে,

(i) $\log \dfrac{b^n}{c^n} + \log \dfrac{c^n}{a^n} + \log \dfrac{a^n}{b^n} = 0.$ [C. U. '44]

(ii) $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1.$ [C. U.]

7. লগ তালিকার সাহায্যে মান নির্ণয় কর :—

(i) $(1{\cdot}035)^{-16}$ (ii) $\sqrt[3]{45{\cdot}37} \times ({\cdot}7692)^4$ [P. U. '49]

(iii) $\dfrac{3{\cdot}78 \times {\cdot}032 \times 109{\cdot}2 \times 19{\cdot}895}{{\cdot}00078 \times 981}$ (iv) $\dfrac{{\cdot}001831 \times {\cdot}1972 \times {\cdot}5374}{{\cdot}6408 \times {\cdot}0896 \times {\cdot}1836}$.

8. $\log 2 = {\cdot}30103$ হইলে $\log 5$-এর মান কত হইবে ?

9. $\log 2 = {\cdot}30103$ হইলে $7 \log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80}$-এর মান নির্ণয় কর।

10. প্রমাণ কর যে $\log_{10} 2$-এর মান $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$-এর মধ্যবর্তী। [C. U. '26]

11. 73-এর ত্রিঘাত নির্ণয় কর। 12. $\frac{7}{8}$ এবং ${\cdot}0265$-এর বর্গ কত ?

13. 4% চক্রবৃদ্ধি হারে 2 বৎসরে 450 পাউণ্ডের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হয় ?

14. সরল কর : $\sqrt[4]{729 \sqrt[3]{9^{-1}.\ 27^{-\frac{4}{3}}}}$.

15. কোন্ মূলধন হইতে 3% চক্রবৃদ্ধি হারে 2 বৎসরের 397·8 টাকা সমূল চক্রবৃদ্ধি হইবে ?

16. একটি গ্রামের বর্তমান লোকসংখ্যা 3000. প্রতি বৎসর 10% হারে লোকসংখ্যা বৃদ্ধি পাইলে 3 বৎসর অন্তে উহার লোকসংখ্যা কত হইবে ?

17. যদি $\log_{10}x - \log_{10}\sqrt{x} = \dfrac{2}{\log_{10}x}$ হয়, তবে x-এর মান কত ?

18. 1 সেন্টিমিটার = ·3937 ইঞ্চি হইলে এক কিলোমিটারে কত মাইল হইবে ?

19. 55 ও 1375-এর মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় কর।

20. যে বৃত্তের ক্ষেত্রফল $\frac{11}{35}$ একর তাহার ব্যাসার্ধ কত ?

21. নিধান $3\sqrt{2}$ হইলে 324-এর এবং নিধান $9\sqrt{3}$ হইলে ·1এর লগারিদম্ কত হয় ?

22. প্রমাণ কর যে $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = 1$. [C. U. '34]

23. যদি $a^{3-x}b^{5x} = a^{x+5}b^{3x}$ হয়, তবে $x \log(\frac{b}{a}) = \log a$ হইবে।

24. যদি $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 3 = {\cdot}4771213$ এবং $6^{3-4x}.4^{x+5} = 8$ হয়, তবে x-এর মান কত ? [C. U. '38]

লগ তালিকার সাহায্যে সমাধান কর :—

25. $2^x.3^{2x} = 100$. 26. $2^x.7^y = 80000$, $3^y = 500$. [C. U. '47]

27. $5^{5-3x} + 4^{\frac{1}{2}x+3} = 5^{7-3x} - 2^{x+5}$ (আসন্ন তিন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত). [C. U. '43]

28. যদি $7^{3x+2}+4^{x+2}=7^{3x+1}+2^{2x+6}$ হয়, তবে লগ তালিকার সাহায্যে x-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '41]

29. যদি $\log(x^3y^2)=3a+2b$ এবং $\log(x^2y^3)=2a+3b$ হয়, তবে $\log x$ ও $\log y$-কে a ও b দ্বারা প্রকাশ কর। [C. U. '48]

30. $\log(x^2y^3)=a$ এবং $\log\left(\frac{x}{y}\right)=b$ হইলে, $\log x$ ও $\log y$-এর মান a ও b দ্বারা প্রকাশ কর। [C. U. '19]

31. যদি $\log_a b=10$ এবং $\log_{6a}(32b)=5$ হয়, তবে a-এর মান কত ? [C. U. '49]

32. কোন একটি নিধানে কোন একটি সংখ্যার লগারিদম্ 6 এবং প্রথম নিধান ও 25-এর গুণফল নিধান হইলে ঐ সংখ্যায় 8 গুণের লগারিদম্ হয় 3. প্রথম নিধানটি কত ? [H. S. '63 (C)]

33. যদি $p=\log_a(bc)$, $q=\log_b(ca)$ ও $r=\log_c(ab)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $pqr=p+q+r+2$.

34. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\log_a(abc)}+\frac{1}{\log_b(abc)}+\frac{1}{\log_c(abc)}=1.$

35. যদি P, Q, R কোন গুণোত্তর শ্রেণীর যথাক্রমে p-তম, q-তম ও r-তম পদ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(q-r)\log P+(r-p)\log Q+(p-q)\log R=0$.

ষষ্ঠ অধ্যায়

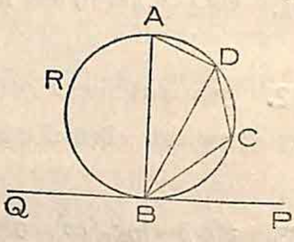
(জ্যামিতি—দশম শ্রেণী)

উপপাদ্য 1

একটি বৃত্তের কোন স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুগামী কোন জ্যা-এর অন্তর্ভূত কোণ দুইটি যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণের সমান হইবে।

[The angles made by a tangent to a circle with a chord drawn through the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.]

BRD বৃত্তের B বিন্দুতে PQ একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু B হইতে BD জ্যা টানা হইয়াছে। মনে কর, BRD চাপের অনুবন্ধী চাপের উপর C একটি বিন্দু।



চিত্র নং 1

প্রমাণ করিতে হইবে যে

(i) ∠PBD=BRD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ, এবং (ii) ∠QBD=BCD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

অঙ্কন : B বিন্দু হইতে বৃত্তের ব্যাস BA টান।

AD, DC, BC যোগ কর।

প্রমাণ : (i) ∵ ∠ADB অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, ∴ ∠ADB এক সমকোণ,

∴ ∠ABD+∠BAD=এক সমকোণ।

আবার, ∵ B বিন্দুতে PQ স্পর্শক এবং BA বৃত্তের ব্যাস, ∴ AB⊥PQ.

∴ ∠PBA=এক সমকোণ, অর্থাৎ ∠ABD+∠PBD=এক সমকোণ।

∴ ∠ABD+∠PBD=∠ABD+∠BAD,

∴ ∠PBD=∠BAD এবং ইহা BRD একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

(ii) ∵ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ ∠BCD+∠BAD=2 সমকোণ।

আবার, ∠PBD+∠QBD=2 সমকোণ।

∴ ∠PBD+∠QBD=∠BCD+∠BAD ;

কিন্তু ∠PBD=∠BAD (পূর্বে প্রমাণিত),

∴ ∠QBD=∠BCD এবং ইহা BCD একান্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি সমান হয়, সুতরাং PBD-কোণ BRD বৃত্তাংশস্থ BAD কোণের সহিত সমান হওয়ায় উহা ঐ বৃত্তাংশস্থ যে কোন কোণের সমান হইল। অনুরূপে QBD-কোণও BCD বৃত্তাংশস্থ যে কোন কোণের সমান।

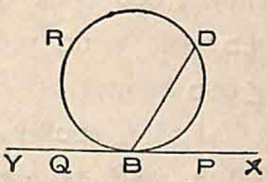
বিপরীত উপপাদ্য

যদি বৃত্তের কোন জ্যা-এর একটি প্রান্তবিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানায় ঐ রেখা ও জ্যা-এর অন্তর্ভূক্ত কোণ একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণের সমান হয়, তবে ঐ সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

[ইহা উপপাদ্য 1-এর বিপরীত উপপাদ্য]

BRD বৃত্তের BD একটি জ্যা এবং B বিন্দু দিয়া PQ এরূপ একটি সরল রেখা টানা হইয়াছে যে ∠PBD=BRD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PQ ঐ বৃত্তের স্পর্শক।



চিত্র নং 2

অঙ্কন ঃ B বিন্দুতে বৃত্তের একটি স্পর্শক XY অঙ্কিত কর।

প্রমাণ ঃ ∵ বৃত্তের B বিন্দুতে XY স্পর্শক এবং BD স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা,

∴ ∠XBD=BRD এই একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ,

কিন্তু ∠PBD=BRD বৃত্তাংশস্থ কোণ (স্বীকার),

∴ ∠PBD=∠XBD, ∴ PB ও XY একই সরলরেখা,

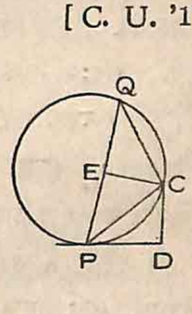
∴ PQ বৃত্তের স্পর্শক।

বিবিধ উদাহরণ (1)

উদা. 1. কোন বৃত্তে একটি স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দু দিয়া একটি জ্যা টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, ঐ জ্যা দ্বারা ছিন্ন যে কোন চাপের মধ্যবিন্দু হইতে ঐ স্পর্শক ও জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় সমান হইবে। [C. U. '15]

PD, বৃত্তটির একটি স্পর্শক এবং PQ স্পর্শবিন্দু-গামী জ্যা। PQ চাপের মধ্যবিন্দু C হইতে PD ও PQ-এর উপর যথাক্রমে CD ও CE লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে, CD=CE.

PC ও QC যোগ কর।



চিত্র নং 3

প্রমাণ ঃ ∵ চাপ PC=চাপ QC,

∴ ∠PQC=∠QPC. আবার PD স্পর্শক ও PC একটি স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা বলিয়া ∠CPD=একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠PQC.

∴ ∠CPD=∠QPC, এখন, △EPC ও △PCD-এর, ∠E=∠D (সমকোণ), ∠EPC=∠CPD এবং PC বাহু সাধারণ,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ CD=CE.

উদা. 2. একটি বৃত্তের AB ব্যাসকে বর্ধিত করায় উহা বৃত্তের C বিন্দুস্থ স্পর্শককে D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\angle BDC + 2\angle BCD =$ এক সমকোণ।

AB-র মধ্যবিন্দু O লও, উহাই বৃত্তের কেন্দ্র হইল। OC ও BC যোগ কর।

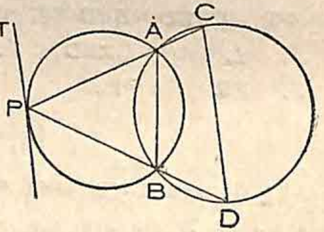
প্রমাণ : $\because$ $OB = OC$, $\therefore$ $\angle OCB = \angle OBC$.

$\triangle BCD$-র বহিঃস্থ $\angle OBC = \angle BCD + \angle BDC$, $\therefore$ $\angle OCB = \angle BCD + BDC$. উভয় দিকে $\angle BCD$ যোগ করিলে, $\angle OCB + \angle BCD = 2\angle BCD + \angle BDC$; কিন্তু CD স্পর্শক ও CO স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ বলিয়া $\angle OCB + \angle BCD$ অর্থাৎ সমগ্র $\angle OCD$ এক সমকোণ।

$\therefore$ $\angle BDC + 2\angle BCD = 1$ সমকোণ।

উদা. 3. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে এবং একটি বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু P হইতে PAC ও PBD সরলরেখা টানিয়া অন্য বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সহিত CD সমান্তরাল। [C. U. '35 ; H. S. '63]

P বিন্দুতে APB বৃত্তের PT স্পর্শক টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে $PT \parallel CD$. CD ও AB যোগ কর।



চিত্র নং 4

প্রমাণ : $\because$ PT স্পর্শক এবং AP স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা,

$\therefore$ $\angle APT =$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ABP$.

আবার, $\because$ ABDC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

$\therefore$ বহিঃস্থ $\angle ABP =$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle C$.

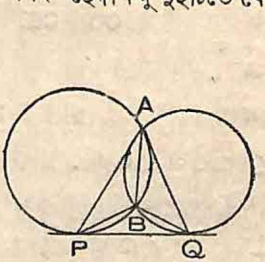
$\therefore$ $\angle TPC = \angle PCD$, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ, সুতরাং $PT \parallel CD$.

উদা. 4. দুইটি পরস্পরছেদী বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক ছেদবিন্দু দুইটিতে যে দুইটি সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে তাহারা পরস্পর সম্পূরক।

বৃত্ত দুইটি A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং সাধারণ স্পর্শক PQ উহাদিগকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle PAQ + \angle PBQ = 2$ সমকোণ।

AP, BP, AQ, BQ, AB যোগ কর।



চিত্র নং 5

প্রমাণ : $\because$ PQ স্পর্শক $\therefore$ $\angle BPQ$=একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle PAB$ এবং $\angle BQP$=একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle BAQ$, $\therefore$ সমগ্র $\angle PAQ = \angle BPQ + \angle BQP$.

$\therefore$ $\angle PAQ + \angle PBQ = \angle BPQ + BQP + \angle PBQ = 2$ সমকোণ।

উদা. 5. ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্তে A, B ও C বিন্দুতে অঙ্কিত তিনটি স্পর্শক একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করিল। প্রমাণ কর যে, এই ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ যথাক্রমে $\triangle ABC$-র বিপরীত কোণের দ্বিগুণের সম্পূরক হইবে। [C. U. '39]

ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে DE, DF, EF স্পর্শক অঙ্কন করায় DEF ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, D কোণ $2\angle C$-এর, E কোণ $2\angle B$-এর এবং F কোণ $2\angle A$-এর সম্পূরক।

প্রমাণ : $\angle DAB$=একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ACB$

এবং $\angle DBA$=একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ACB$,

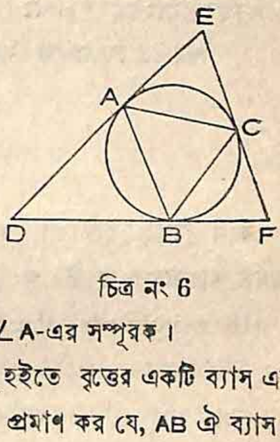
$\therefore$ $\angle DAB + \angle DBA = 2\angle ACB$.

এখন, $\triangle ABD$-এর

$\angle D + \angle DAB + \angle DBA = 2$ সমকোণ,

$\therefore$ $\angle D + 2\angle ACB = 2$ সমকোণ।

সুতরাং $\angle D$, $2\angle C$-এর সম্পূরক হইল।



চিত্র নং 6

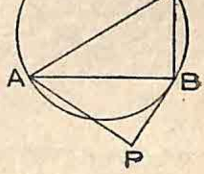
অনুরূপে $\angle E = 2\angle B$-এর সম্পূরক এবং $\angle F = 2\angle A$-এর সম্পূরক।

উদা. 6. কোন বৃত্তের AB একটি জ্যা। A বিন্দু হইতে বৃত্তের একটি ব্যাস এবং B বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের উপর লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, AB ঐ ব্যাস ও স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক। [C. U. '49 Addl. cf. D. B. '26]

মনে কর, AB বৃত্তটির একটি জ্যা এবং AC উহার একটি ব্যাস। বৃত্তের B বিন্দুতে BP একটি স্পর্শক এবং $AB \perp BP$.

প্রমাণ করিতে হইবে, $\angle BAP = \angle BAC$

প্রমাণ : BC যোগ কর। $\angle ABC$ অর্ধ-বৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ। $\angle ABP$=একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ACB$. এখন $\triangle ABP$ ও $\triangle ABC$-র,



চিত্র নং 7

$\angle APB = \angle ABC$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ), $\angle ABP = \angle ACB$.

$\therefore$ অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান, অর্থাৎ $\angle BAP = \angle BAC$.

উদা. 7. দুইটি বৃত্ত A বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে এবং বহির্বৃত্তটির PQ জ্যা অন্তর্বৃত্তকে R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AR সরলরেখা ∠PAQ-এর সমদ্বিখণ্ডক। [P. U. '33]

Hints : মনে কর, AQ ভিতরের বৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। BR যোগ কর এবং A বিন্দুতে AT উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক টান।

প্রমাণ : AT স্পর্শক এবং AT স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা,

∴ ∠TAR = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ABR.

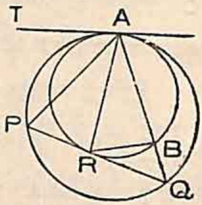
অনুরূপে ∠TAP = ∠Q.

∴ ∠PAR = ∠ABR − ∠Q = ∠BRQ

(∵ বহিঃস্থ ∠ABR = ∠Q + ∠BRQ)

= একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠BAR (∵ PQ স্পর্শক),

∴ AR, ∠PAQ-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

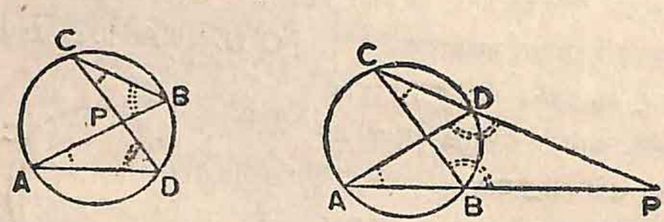


চিত্র নং 8

উপপাদ্য 2

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্যটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

[If two chords of a circle intersect, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.]



চিত্র নং 9

মনে কর, কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের অন্তঃস্থ (প্রথম চিত্রে), কিংবা বহিঃস্থ (দ্বিতীয় চিত্রে) P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AP.PB = PC.PD.

অঙ্কন : AD ও BC যোগ কর।

প্রমাণ : PAD ও PBC ত্রিভুজের $\angle APD = \angle BPC$,

এবং $\angle PAD = \angle PCB$ (একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ),

সুতরাং অবশিষ্ট $\angle PDA =$ অবশিষ্ট $\angle PBC$. $\therefore$ ঐ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী, সুতরাং উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী,

$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{PD}{PB}$ $\therefore AP.PB = PC.PD.$

অনুসিদ্ধান্ত : (1) যদি কোন বৃত্তের AB জ্যা ও PQ স্পর্শক বহিঃস্থ P বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $AP.PB = PQ^2$ হইবে।

[চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর ABC বৃত্তের AB জ্যা ও PQ স্পর্শক বহিঃস্থ P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে $AP.PB = PQ^2$.

AQ, BQ যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ PQ বৃত্তটির স্পর্শক এবং QB স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা,

$\therefore$ $\angle PQB =$ বিপরীত বৃত্তাংশস্থ $\angle QAB = \angle PAQ$.

এক্ষণে, ΔAPQ ও ΔBPQ-এর $\angle P$ সাধারণ কোণ এবং $\angle PAQ = \angle PQB$, সুতরাং উহাদের অবশিষ্ট কোণ দুইটিও সমান।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, $\therefore$ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

$\therefore \frac{AP}{PQ} = \frac{PQ}{PB}$. $\therefore AP.PB = PQ^2$.

(2) যদি কোন বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে PBA ও PQ এরূপ দুইটি সরলরেখা টানা হয় যাহাতে $AP.PB = PQ^2$, তবে PQ ঐ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

[চিত্র আঁকিয়া যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে এখানে লিখিবে।]

প্রমাণ : যদি PQ ঐ বৃত্তের স্পর্শক না হয়, তবে উহাকে বর্ধিত করিলে উহা পরিধিকে আর একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে কর, R বিন্দুতে ছেদ করিল।

AQ, BR যোগ কর। এক্ষণে, ΔPAQ ও ΔPBR-এর $\angle APQ = \angle BPR$,

$\angle PAQ = \angle PBR$ (একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ বলিয়া), সুতরাং অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, সুতরাং উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

$\therefore \frac{AP}{PR} = \frac{PQ}{PB}$. $\therefore AP.PB = PR.PQ.$

কিন্তু $AP.PB = PQ^2$ (স্বীকার), $\therefore PR.PQ = PQ^2$, $\therefore PR = PQ.$

অতএব R ও Q একই বিন্দু হইল, দুইটি পৃথক বিন্দু হইতে পারে না। ∴ PQ সরলরেখা একটিমাত্র বিন্দুতে বৃত্তের সহিত মিলিত হইতে পারে বলিয়া উহা বৃত্তের স্পর্শক হইল।

[উপপাদ্য 2-এর বিপরীত উপপাদ্য কি হইবে? সেই উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।]

(3) বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের দুইটি ছেদক অঙ্কিত করিলে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয়।

[উপপাদ্য 2-এর ন্যায় প্রমাণ লিখিবে। উহার দ্বিতীয় চিত্র আঁকিবে]

বিবিধ উদাহরণ (2)

উদা. 1. কোন বৃত্তের AB জ্যা-এর উপর P যে কোন একটি বিন্দু। P হইতে পরিধি পর্যন্ত PC এরূপ একটি সরলরেখা টান যেন $PC^2 = PA.PB$ হয়। [C. U. '40]

মনে কর, বৃত্তটির কেন্দ্র O এবং উহার AB জ্যার উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। OP যোগ কর এবং P বিন্দুতে OP-র উপর লম্ব টান, উহা যেন বৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। উহাই উদ্দিষ্ট সরলরেখা। CP-কে বর্ধিত করিয়া পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ কর।

প্রমাণ: ∵ $OP \perp CD$, ∴ $PC = PD$.

এক্ষণে, $AP.BP = PC.PD = PC.PC = PC^2$.

উদা. 2. AB-কে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত কোন অর্ধবৃত্তের AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$.

[C. U. '37 ; D. B. '39]

Hints: $PM \perp AB$ টান। ADPM চতুর্ভুজের, $\angle D + \angle PMA = 2$ সমকোণ, ∴ উহা বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। এক্ষণে যেহেতু ADPM বৃত্তের DP ও AM জ্যাদ্বয় বহিঃস্থ B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে,

∴ $AB.BM = BD.BP$......(1).

অনুরূপে PCBM বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া $AB.AM = AC.AP$···(2).

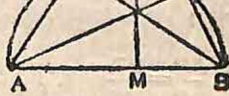
এখন (1) ও (2) যোগ করিলে

$AB.BM + AB.AM = BD.BP + AC.AP$,

বা, $AB(BM + AM) = AC.AP + BD.BP$

অর্থাৎ $AB.AB = AC.AP + BD.BP$;

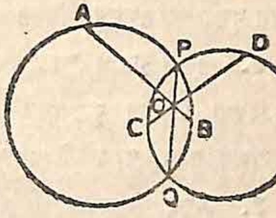
∴ $AB^2 = AC.AP + BD.BP$.



চিত্র নং 10

উদা. 3. দুইটি ছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যা-এর উপরিস্থিত কোন বিন্দু দিয়া প্রত্যেক বৃত্তের একটি করিয়া জ্যা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, ঐ জ্যাদ্বয়ের প্রান্তবিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ হইবে।

মনে কর, উভয় বৃত্তের সাধারণ জ্যা PQ-এর উপর O যে কোন একটি বিন্দু এবং উহার মধ্য দিয়া বৃত্ত দুইটিতে যথাক্রমে AOB ও COD জ্যা টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, C, B, D একই বৃত্তস্থ।



চিত্র নং 11

প্রমাণ: PAQ বৃত্তের AB ও PQ জ্যা O বিন্দুতে ছেদ করায় AO.BO = PO.QO.

আবার CPD বৃত্তে CO.DO = PO.QO.

∴ AO.BO = CO.DO. ∴ A, C, B ও D বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ।

উদা. 4. দুইটি পরস্পরছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যা-এর বর্ধিত অংশের উপরিস্থিত কোন বিন্দু হইতে বৃত্তদ্বয়ের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করিলে তাহারা পরস্পর সমান হইবে। [C. U. '34 ; P. U. 1895]

মনে কর, বৃত্ত দুইটি A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং সাধারণ জ্যা AB-র বর্ধিতাংশের উপর যে কোন T বিন্দু হইতে বৃত্ত দুইটিতে যথাক্রমে TP ও TR স্পর্শক টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, TP = TR.

প্রমাণ: TP স্পর্শক ও TAB ছেদক বলিয়া ABP বৃত্তে $TA.TB = PT^2$.
অনুরূপে ABR বৃত্তে $TA.TB = TR^2$ ∴ $TP^2 = TR^2$ ∴ TP = TR.

Exercise 1

1. বৃত্তের কোন জ্যা-এর সমান্তরাল একটি স্পর্শক টানিলে মধ্যবর্তী চাপটি স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। [C. U. '45 ; D. B. '32]

2. বৃত্তের পরিধিস্থ A, B, C তিনটি বিন্দু। বর্ধিত BC সরলরেখা এবং A বিন্দুতে স্পর্শকটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে ∠ACP = ∠PAB.

3. A বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শকারী দুইটি বৃত্তে APQ ও AXY দুইটি জ্যা টানা হইল। প্রমাণ কর যে PX ∥ QY. [C. U. '47]

4. দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে এবং একটি সরলরেখা উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, বৃত্তদ্বয়ের মধ্যবর্তী ঐ সরলরেখার অংশদ্বয় স্পর্শবিন্দুতে সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে। [C. U. '24]

5. একটি বৃত্তকে এরূপ দুই বৃত্তাংশে বিভক্ত কর যেন একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ অপর বৃত্তাংশস্থ কোণের দ্বিগুণ হয়।

6. দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ বা বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং স্পর্শবিন্দু হইতে দুইটি সরলরেখা টানিয়া বৃত্তদ্বয়কে ছেদ করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, ছেদবিন্দুগুলির সংযোজক সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

7. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ এবং C হইতে অতিভুজের উপর CD লম্ব। প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD.BD$. [C. U. '44]

8. AB ও CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং $AO.BO = CO.DO$; প্রমাণ কর যে, A, B, C ও D একই বৃত্তস্থ।

9. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিলে বর্ধিত AB উহাদের সাধারণ স্পর্শককে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [C. U. '19]

10. কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় বহিঃস্থ O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। OB ও OD সমান হইলে প্রমাণ কর যে, $AB = CD$. [C. U. '12]

11. ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর AX, BY ও CZ লম্ব তিনটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $AO.OX = BO.OY = CO.OZ$ [G. U.'48]

12. কোন বৃত্তের অন্তঃস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত জ্যা-এর অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, ঐ বিন্দুগামী ক্ষুদ্রতম জ্যা-এর অর্ধাংশের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে। [C. U. '49]

13. A, B ও C কোন সরলরেখার উপরিস্থিত তিনটি বিন্দু। B ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্তগুলিতে A হইতে অঙ্কিত স্পর্শকগুলির স্পর্শবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '46]

14. যদি তিনটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করে, তবে তাহাদের সাধারণ জ্যা তিনটি সমবিন্দু অথবা সমান্তরাল হইবে।

CONSTRUCTION OF TANGENTS

(স্পর্শক অঙ্কন)

সম্পাদ্য 1

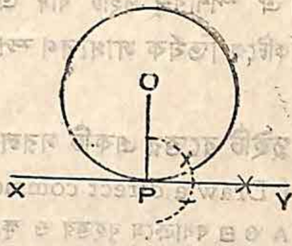
বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw a tangent to a circle at a given point on the circumference.]

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P উহার পরিধিস্থ একটি বিন্দু। P বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন : OP যোগ কর এবং P বিন্দুতে XY ⊥ OP টান।

XY উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইল।



চিত্র নং 12

প্রমাণ : ∵ XY সরলরেখা OP ব্যাসার্ধের P বিন্দুতে OP-র উপর লম্ব ;

∴ XY ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

অতএব, XY ঐ বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক।

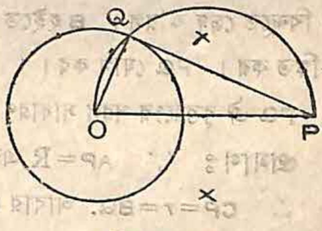
সম্পাদ্য 2

বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw a tangent to a circle from a given external point.]

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। P বিন্দু হইতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : OP যোগ কর এবং OPকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা যেন বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ যোগ কর। এক্ষণে PQ উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইল।



চিত্র নং 13

প্রমাণ : OQ যোগ কর।

∵ OQP অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, ∴ ∠OQP এক সমকোণ।

অতএব, PQ সরলরেখা OQ ব্যাসার্ধের উপর Q বিন্দুতে লম্ব হওয়ায় PQ বৃত্তটির একটি স্পর্শক।

[দ্রষ্টব্য : উপরের অঙ্কনে OPকে ব্যাস করিয়া যদি একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হয়, তবে উহা প্রদত্ত বৃত্তকে Q এর বিপরীত দিকে আর একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে কর, সেই বিন্দু R. এখন PR যোগ করিলে PR ঐ বৃত্তের আর একটি স্পর্শক হইবে।

অতএব, বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।]

সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন

যদি একটি সরলরেখা দুইটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করে তবে তাহাকে ঐ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক বলে। সাধারণ স্পর্শক **সরল ও তির্যক** দুই প্রকার হইতে পারে। যে সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র-সংযোজক সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত তাহাকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** (Direct Common Tangent) বলে। আর ঐ স্পর্শবিন্দু দুইটি যদি ঐ সরলরেখার পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে থাকে, তবে স্পর্শকটিকে **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** (Transverse Common Tangent) বলে।

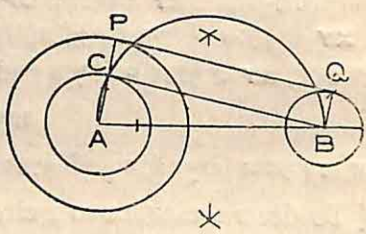
সম্পাদ্য 3

দুইটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।

[Draw a direct common tangent to two given circles.]

A ও B যথাক্রমে বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র এবং R ও r যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ। এই বৃত্ত দুইটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB যোগ কর। A-কে কেন্দ্র করিয়া বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তরফল (R—r) ব্যাসার্ধ লইয়া একটি তৃতীয় বৃত্ত অঙ্কিত কর। B হইতে তৃতীয় বৃত্তের স্পর্শক BC অঙ্কিত কর। AC যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন বৃহত্তর বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। B হইতে AP-র সমান্তরাল করিয়া একই দিকে BQ ব্যাসার্ধ টান কর। PQ যোগ কর।



চিত্র নং 14

PQ ঐ বৃত্তদ্বয়ের সরল সাধারণ স্পর্শক হইল।

প্রমাণ : $\because$ AP = R এবং AC = R—r.

$\therefore$ CP = r = BQ. আবার CP ∥ BQ, $\therefore$ BCPQ একটি সামান্তরিক,

এবং ইহার ∠PCB = এক সমকোণ ($\because$ ∠ACB সমকোণ)

$\therefore$ BCPQ একটি আয়তক্ষেত্র। $\therefore$ ∠CPQ ও ∠PQB প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ PQ উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক হইল।

[**দ্রষ্টব্য :** C-এর বিপরীত পার্শ্বে B হইতে ঐ তৃতীয় বৃত্তটির আর একটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়। অতএব, AB-র অপর পার্শ্বে PQ-এর অনুরূপ আর একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।]

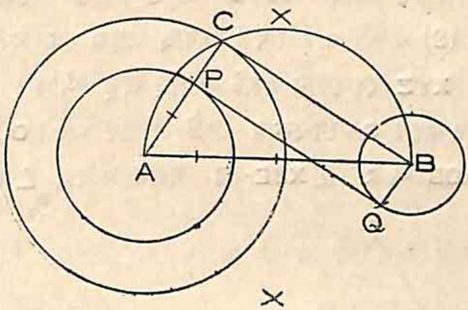
বি. দ্র. : প্রদত্ত বৃত্তদ্বয় সমান হইলে কিরূপে সাধারণ স্পর্শক আঁকিবে দেখাও।

সম্পাদ্য 4

দুইটি বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।

[Draw a transverse common tangent to two given circles.]

A ও B যথাক্রমে বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র এবং R ও r যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ। বৃত্তদ্বয়ের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং 15

অঙ্কন : AB যোগ কর। A-কে কেন্দ্র করিয়া বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ দুইটির সমষ্টি $(R+r)$এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি তৃতীয় বৃত্ত অঙ্কিত কর। B হইতে এই বৃত্তে BC স্পর্শক টান। AC যোগ কর, উহা যেন প্রদত্ত A-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে B হইতে AP-র সমান্তরাল করিয়া উহার বিপরীত দিকে BQ ব্যাসার্ধ টান। PQ যোগ কর। PQ উদ্দিষ্ট তির্যক সাধারণ স্পর্শক হইল।

প্রমাণ : $\because$ $AC = R + r$ এবং $AP = R$,

$\therefore$ $PC = r = BQ$, এবং $PC \parallel BQ$.

$\therefore$ PCBQ একটি সামান্তরিক, এবং উহার $\angle C$ এক সমকোণ হওয়ায় উহা একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore$ $\angle APQ = \angle PQB =$ এক সমকোণ।

$\therefore$ PQ উভয় বৃত্তের তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

[**দ্রষ্টব্য :** পূর্বের ন্যায় PQ-এর অনুরূপ আর একটি তির্যক স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। অতএব, দুইটি বৃত্তের মোট চারিটি সাধারণ স্পর্শক হইতে পারে। বৃত্তদ্বয়ের অবস্থান অনুসারে উহাদের 4টি, 3টি, 2টি বা 1টি সাধারণ স্পর্শক হইতে পারে। একটি বৃত্ত অন্যটির ভিতরে থাকিলে উহাদের সাধারণ স্পর্শক লুপ্ত হইয়া থাকে। তোমরা চিত্র আঁকিয়া ঐ বিভিন্ন অবস্থানগুলি দেখাও।]

বৃত্তের অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত সুষম ত্রিভুজ বা বহুভুজ অঙ্কন

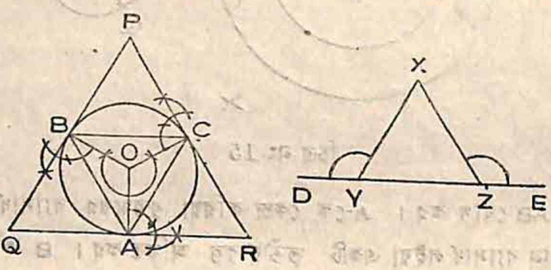
সম্পাদ্য 5

একটি বৃত্তের (১) অন্তর্লিখিত ও (২) পরিলিখিত এক একটি সুষম ত্রিভুজ (অর্থাৎ সমবাহু ত্রিভুজ) অঙ্কিত কর।

[To draw a regular figure of 3 sides (*i*) in or (*ii*) about a given circle.]

(প্রথম প্রণালী) : মনে কর O প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র। উহার একটি (1) অন্তর্লিখিত এবং (2) একটি পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

(1) **অঙ্কন :** XYZ যে-কোন একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। YZ-কে উভয়দিকে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত কর। OA যে-কোন একটি ব্যাসার্ধ লও। O বিন্দুতে ∠DYX-এর সমান করিয়া ∠AOB এবং ∠XZE-এর সমান করিয়া ∠AOC অঙ্কিত কর।



চিত্র নং 16

OB ও OC বৃত্তটিকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। AB, BC, AC যোগ কর।

এক্ষণে △ABC বৃত্তটির অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : ∵ XYZ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ 60°,

∴ ∠XYD = ∠XZE = 120°, অতএব O বিন্দুতে ∠AOB = ∠AOC = 120°,
∴ BOC কোণও 120°.

এক্ষণে O-কেন্দ্রস্থ কোণ তিনটি সমান বলিয়া চাপ AB = চাপ BC = চাপ AC.

∴ জ্যা AB = জ্যা BC = জ্যা AC, ∴ △ABC সমবাহু।

(2) **অঙ্কন :** পূর্বের ন্যায় অঙ্কন করিয়া A, B ও C বিন্দুতে বৃত্তটির তিনটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। উহারা যেন পরস্পর ছেদ করিয়া △PQR উৎপন্ন করিল। উহাই বৃত্তটির পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : QP ও QR স্পর্শক বলিয়া ∠OBQ = ∠OAQ = এক সমকোণ।

∴ ∠AOB + ∠Q = 2 সমকোণ ; কিন্তু ∠AOB = 120°, ∴ ∠Q = 60°.

অনুরূপে ∠P ও ∠R প্রত্যেকে 60°. ∴ PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

(দ্বিতীয় প্রণালী)ঃ প্রদত্ত বৃত্তটির একটি ব্যাস AP লও। P-কে কেন্দ্র করিয়া এবং PO ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। মনে কর, ইহা প্রদত্ত বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। AB, BC, AC যোগ কর। $\triangle$ABC অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ হইল। OB, OC, PB, PC যোগ কর।

প্রমাণঃ $\triangle$BOP ও $\triangle$COP সমবাহু ত্রিভুজ ($\because$ বাহুগুলি = ব্যাসার্ধ),

$\therefore$ $\angle BOC = 120^\circ$,

$\therefore$ একই চাপের উপর পরিধিস্থ $\angle BAC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle BOC = 60^\circ$.

আবার $\angle BCA = \angle BPA$ ($\because$ একই বৃত্তাংশস্থ) $= 60^\circ$, $\therefore$ $\triangle$ABC সমবাহু।

এক্ষণে, A, B ও C বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক আঁকিলে পূর্বের ন্যায় পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজটি পাওয়া যাইবে।

(তৃতীয় প্রণালী)ঃ বৃত্তের যে কোন ব্যাসার্ধ OA লও। AO র সমান AX, XC জ্যা আঁক। AC যোগ কর এবং AC-র সমান CB জ্যা আঁক। এক্ষণে $\triangle$ABC সমবাহু হইবে। [প্রমাণ সহজ]

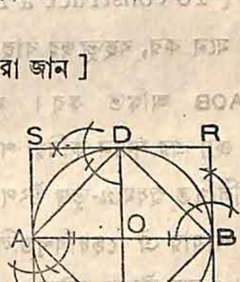
সম্পাদ্য 6

একটি বৃত্তের (১) অন্তর্লিখিত ও (২) পরিলিখিত এক একটি সুষম চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a regular figure of 4 sides (i) in or (ii) about a given circle.]

[সুষম চতুর্ভুজ বলিলে একটি বর্গক্ষেত্র বুঝায় তাহা তোমরা জান]

O, প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র। বৃত্তটির (1) একটি অন্তর্লিখিত এবং (2) একটি পরিলিখিত সুষম চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং 17

অঙ্কনঃ বৃত্তের যে কোন একটি ব্যাস AB লও এবং ইহার উপর লম্ব আর একটি CD ব্যাস অঙ্কিত কর।

(1) পর পর A, C, B, D, A যোগ কর। এক্ষণে ACBD অন্তর্লিখিত সুষম চতুর্ভুজ হইল।

প্রমাণঃ $\because$ O কেন্দ্রস্থ কোণগুলি সমকোণ বলিয়া সমান,

$\therefore$ AD, AC, BC ও BD জ্যাগুলিও সমান।

আবার, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ প্রত্যেকে সমকোণ।

$\therefore$ ABCD একটি বৃত্তস্থ সুষম চতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র।

(2) A, C, B ও D বিন্দুতে বৃত্তের চারিটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। মনে কর, উহারা পরস্পর P, Q, R, S বিন্দুতে ছেদ করিলে। PQRS ঐ বৃত্তের পরিলিখিত সুষম চতুর্ভুজ হইল।

প্রমাণ : OD-র উপর SR ও AB লম্ব হওয়ায় SR ‖ AB ; অনুরূপে AS ‖ BR.
∴ ABRS একটি সামান্তরিক ; কিন্তু ∠BAS সমকোণ, ∴ ABRS একটি আয়তক্ষেত্র। অনুরূপে ABQP একটি আয়তক্ষেত্র। ∴ SR = AB = PQ.
অনুরূপে PS = CD = RQ ; কিন্তু AB = CD, ∴ PS = PQ.
∴ PQRS একটি সুষম চতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র।

অনুসিদ্ধান্ত : (1) বৃত্তের অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত অষ্টভুজ অঙ্কন করিতে হইলে উপরের লম্ব ব্যাসদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ চারিটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। ঐ দ্বিখণ্ডকগুলি বৃত্তকে যেন E, F, G, H বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে A হইতে আরম্ভ করিয়া পরিধিস্থ পর পর বিন্দুগুলি যোগ করিলেই বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম অষ্টভুজ পাওয়া যাইবে। [প্রমাণ সহজ]

আবার ঐ বিন্দুগুলিতে বৃত্তের স্পর্শকগুলি অঙ্কিত করিলে পরিলিখিত সুষম অষ্টভুজ পাওয়া যাইবে।

(3) কোন বৃত্তে একটি অন্তর্লিখিত সুষম বহুভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।
[To construct a regular polygon in a circle.]

মনে কর, বহুভুজের বাহুসংখ্যা n. এক্ষণে বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুতে $\frac{360^\circ}{n}$-এর সমান ∠AOB অঙ্কিত কর। মনে কর, A ও B বৃত্তের ছেদবিন্দু। AB যোগ কর। AB জ্যা-এর সমান করিয়া পর পর BC, CD প্রভৃতি জ্যাগুলি অঙ্কিত কর। এইরূপে অন্তর্লিখিত সুষম n-ভুজ উৎপন্ন হইবে।

আবার ঐ ছেদবিন্দুগুলিতে বৃত্তের স্পর্শকগুলি অঙ্কিত করিলে বৃত্তের পরিলিখিত সুষম n-ভুজ উৎপন্ন হইবে।

এই প্রণালীতে বৃত্তে 3, 4 প্রভৃতি যে কোন সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম ক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়।

মাধ্যমিক ছেদ (Medial Section)

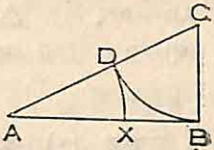
যদি একটি সরলরেখা কোন বিন্দুতে এইরূপে দুই অংশে বিভক্ত হয় যে, একটি অংশ ও সমগ্র রেখার অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রটি অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান, তাহা হইলে ঐ সরলরেখাকে ঐ বিন্দুতে **মাধ্যমিক ছেদে** বিভক্ত বলা হয়। ঐ ছেদবিন্দুকে **মাধ্যমিক ছেদবিন্দু** (point of medial section) বলে।

(ক) একটি সরলরেখাকে মাধ্যমিক ছেদে অন্তর্বিভক্ত কর।

[Divide a straight line internally in medial section.]

মনে কর, AB সরলরেখাকে মাধ্যমিক ছেদে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB-র উপর BC লম্ব টান এবং $BC=\frac{1}{2}AB$ কর। AC যোগ করিয়া উহা হইতে BC-র সমান CD অংশ কাটিয়া লও। AB হইতে AD-র সমান AX অংশ কাটিয়া লও। এক্ষণে, X বিন্দুতে AB মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত হইল।



চিত্র নং 18

প্রমাণ : $\angle B$ সমকোণ বলিয়া,

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = AC^2 - CD^2 = (AC + CD)(AC - CD)$$
$$= (AD + CD + CD.AD)$$
$$= (AD + AB).AD \quad [\because \; CD = BC = \tfrac{1}{2}AB, \;\; \therefore \; CD + CD = AB]$$
$$= AD^2 + AB.AD,$$

$\therefore \; AB^2 - AB.AD = AD^2$, বা, $AB(AB - AD) = AD^2$,

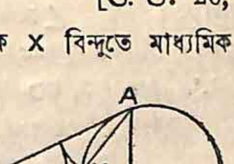
বা, $AB(AB - AX) = AX^2 \; [\because \; AD = AX]$

বা, $AB.BX = AX^2$, সুতরাং X বিন্দুতে AB মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত হইয়াছে।

[**দ্রষ্টব্য :** যদি AB-কে মাধ্যমিক ছেদে বহির্বিভক্ত করিতে হয়, তবে AC-র বর্ধিতাংশ হইতে BC-র সমান CD অংশ কাটিয়া লইবে। তারপর BA-কে E বিন্দু পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করিবে যেন $AE = AD$ হয়। E বিন্দুতে AB মাধ্যমিক ছেদে বহির্বিভক্ত হইবে।]

(খ) এরূপ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন তাহার প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ শীর্ষকোণের দ্বিগুণ হয়। [C. U. '20, '37]

অঙ্কন : যে কোন সরলরেখা AB লও। উহাকে X বিন্দুতে মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত কর, যেন $AB.BX = AX^2$ হয়। B ও X বিন্দু দুইটিকে কেন্দ্র করিয়া AX-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক। উহারা যেন C বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। AC, BC ও CX যোগ কর। $\triangle ABC$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।



চিত্র নং 19

প্রমাণ : $\triangle AXC$-র পরিবৃত্ত অঙ্কিতকর। এক্ষণে, $AB.BX = AX^2 = BC^2$ ($\because$ $BC = AX$), সুতরাং AXC বৃত্তের C বিন্দুতে BC স্পর্শক,

CX স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা। ∴ ∠BCX = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠CAX. ∵ AX = CX (অঙ্কন),

∴ ∠AOX = ∠CAX, ∴ সমগ্র কোণ ∠ACB = 2∠CAX = 2∠A.

আবার, ∠BXC = ∠CAX + ∠ACX = 2∠A ;

কিন্তু ∠B = ∠BXC (∵ BC = AX = CX), ∴ ∠B = 2∠A, ∴ ∠B = ∠ACB,

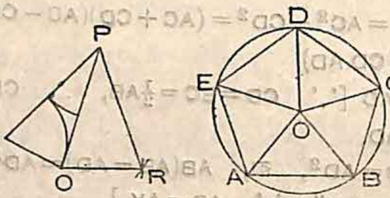
∴ AB = AC, ∴ △ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং ইহার ∠B = ∠C = 2∠A.

(গ), (খ)-এর সাহায্যে একটি সমকোণকে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত কর।

সম্পাদ্য 7

একটি বৃত্তের (১) অন্তর্লিখিত ও (২) পরিলিখিত এক একটি সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত কর। [C. U. '15, '34, '37, '47]

[To construct a regular pentagon (i) in or (ii) about a given circle.]



চিত্র নং 20

মনে কর, প্রদত্ত O-কেন্দ্রীয় বৃত্তে একটি সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

(1) **অঙ্কন :** PQR এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক যেন উহার Q ও R কোণের প্রত্যেকটি P কোণের দ্বিগুণ হয়। OA যে-কোন ব্যাসার্ধ আঁক এবং O বিন্দুতে ∠AOB = ∠Q আঁক, উহার OB বাহু যেন পরিধিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB যোগ কর। AB-র সমান করিয়া BC, CD, DE জ্যা আঁক এবং AE যোগ কর। এক্ষণে ABCDE বৃত্তটি অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজ হইল।

প্রমাণ : ∵ ∠Q = 2∠P এবং ∠R = 2∠P, ∴ ∠P + ∠Q + ∠R = 5∠P, ∴ 5∠P = 180°, ∴ ∠P = 36°, ∴ ∠Q = 72°,

এক্ষণে ∵ AB, BC, CD ও DE চারিটি সমান জ্যা,

∴ কেন্দ্রস্থ ∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ∠DOE = 72°,

∴ ঐ কোণগুলির সমষ্টি = 72° × 4 = 288° ; কিন্তু O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি 360°,

∴ ∠EOA = 360° − 288° = 72°. ∴ AE জ্যাও অপর জ্যাগুলির সমান।

আবার ∵ △OAB সমদ্বিবাহু, ∴ ∠OAB = ∠OBA ; এবং ∵ ∠AOB = 72°,

∴ ∠OAB + ∠OBA = 180° − 72° = 108°, ∴ ∠OAB = ∠OBA = 54°,

এইরূপে চিত্রের প্রত্যেক ত্রিভুজের ভূমিকোণ = 54°.

∴ পঞ্চভুজটির প্রত্যেক কোণ $= 2 \times 54° = 108°$.

অতএব, ABCDE ঐ বৃত্তে একটি অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজ।

(2) A, B, C, D, E বিন্দুতে যথাক্রমে বৃত্তের পাঁচটি স্পর্শক PQ, QR, RS, ST ও PT অঙ্কিত কর। ইহাতে যে PQRST পঞ্চভুজটি উৎপন্ন হইল তাহাই বৃত্তটির পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ।

প্রমাণ : $\angle OAQ + \angle OBQ = 2$ সমকোণ, ∴ $\angle Q = \angle AOB$-এর সম্পূরক। অনুরূপে $\angle P$, $\angle R$, $\angle S$, $\angle T$ কোণগুলিও তাহাদের বিপরীত O বিন্দুস্থ কোণের সম্পূরক। কিন্তু O বিন্দুস্থ পাঁচটি কোণ সমান হওয়ায় $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ প্রভৃতি কোণ পাঁচটিও সমান।

আবার, PO ও QO যোগ করিলে $\triangle AOQ$ ও $\triangle BOQ$ সর্বসম হইবে।

∴ $\angle AOQ = \angle BOQ = \frac{1}{2}\angle AOB$. অনুরূপে $\angle AOP = \frac{1}{2}\angle AOE$.

∴ $\angle AOQ = AOP$. ∴ $\triangle AOP$ ও $\triangle AOQ$ সর্বসম, ∴ $AQ = AP$,

∴ $PQ = 2AQ$. অনুরূপে $QR = 2BQ$, কিন্তু $AQ = BQ$, ∴ $PQ = QR$.

অনুরূপে PQRST-র সব বাহু সমান। ∴ উহাই পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ হইল।

সম্পাদ্য 8

একটি বৃত্তের (১) অন্তর্লিখিত ও (২) পরিলিখিত এক একটি সুষম ষড়্ভুজ অঙ্কিত কর।

[To construct a regular figure of 6 sides (i) in or (ii) about a given circle.]

O প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র। বৃত্তটির একটি অন্তর্লিখিত ও একটি পরিলিখিত সুষম ষড়ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।



(1) **অঙ্কন :** OA যে-কোন ব্যাসার্ধ লও এবং AO-র সমান করিয়া AB, BC, CD, DE ও EF জ্যাগুলি অঙ্কিত কর। AF যোগ কর। এক্ষণে ABCDEF বৃত্তটির অন্তর্লিখিত সুষম ষড়ভুজ হইল।

প্রমাণ : BO, CO প্রভৃতি যোগ কর।

এক্ষণে, AB, BC, CD, DE ও EF পাঁচটি জ্যা

চিত্র নং 21

সমান বলিয়া উহাদের কেন্দ্রস্থ সম্মুখ কোণগুলিও সমান। আবার, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ প্রভৃতি সমবাহু বলিয়া AOB, BOC প্রভৃতি পাঁচটি কোণের প্রত্যেকটি 60° ; সুতরাং অবশিষ্ট AOF কোণের পরিমাণও 60° হইবে (∵ O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি $= 360°$)। ∴ AOF ত্রিভুজও সমবাহু। ∴ ষড়ভুজটি সমবাহু হইল এবং

∠ABC, ∠BCD প্রভৃতি কোণগুলির প্রত্যেকটি 60 ডিগ্রীর দ্বিগুণ বা 120° বলিয়া ষড়ভুজটির কোণগুলিও সমান।

অতএব, ABCDEF বৃত্তটির অন্তর্লিখিত সুষম ষড়ভুজ।

(2) **অঙ্কন :** A, B, C, D, E, F বিন্দুতে প্রদত্ত বৃত্তের 6টি স্পর্শক আঁক। উহারা পরস্পর ছেদ করিয়া যে ষড়ভুজটি উৎপন্ন করিবে তাহাই বৃত্তের পরিলিখিত সুষম ষড়ভুজ হইবে। [সম্পাদ্য 7-এর ন্যায় প্রমাণ দাও]

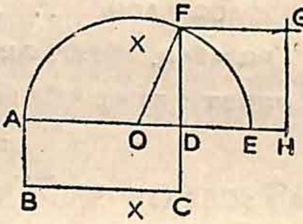
সম্পাদ্য 9

একটি আয়তক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a square equal in area to a given rectangle.]

ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। ইহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AD-কে E বিন্দু পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত কর যেন DE = DC হয়। AE-কে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত আঁক এবং CD-কে বর্ধিত করিয়া অর্ধবৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ কর। DEকে H পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DH = DF হয়। F ও Hকে কেন্দ্র করিয়া ও DF ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক, উহারা যেন G বিন্দুতে ছেদ করিল।



চিত্র নং 22

FG ও HG যোগ কর। DFGH উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হইল।

প্রমাণ : DFGH-এর সব বাহু সমান ও ∠D সমকোণ,

∴ উহা একটি বর্গক্ষেত্র। AE-র মধ্যবিন্দু O বৃত্তের কেন্দ্র। FO যোগ কর। $OA = OF = OE$, ∵ ∠D সমকোণ, ∴ $DF^2 = OF^2 - OD^2 = OE^2 - OD^2$ $= (OE + OD)(OE - OD) = (AD + OD).DE = AD.DE = AD.DC.$

∴ DFGH বর্গক্ষেত্র = ABCD আয়তক্ষেত্র।

অনুসিদ্ধান্ত : (1) কোন বর্গক্ষেত্রের সমান আয়তক্ষেত্র অঙ্কন।

সঙ্কেত : [চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর, প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু a. $2a$ অপেক্ষা বৃহত্তর একটি সরলরেখা AB লও এবং উহাকে ব্যাস করিয়া অর্ধবৃত্ত আঁক। A বিন্দুতে a-র সমান AC লম্ব টান এবং AB-র সমান্তরাল CE টান, উহা যেন অর্ধবৃত্তকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। DF⊥AB টান।

AF ও BF বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রই উদ্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র। অর্ধবৃত্তস্থ ∠ADB সমকোণ এবং D হইতে অতিভুজ AB-র উপর DF লম্ব, ∴ $a^2 = AC^2 = DF^2 = AF.BF.$

(2) একটি সবলরেখাকে এরূপভাবে অন্তর্বিভক্ত কর যে উহার অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

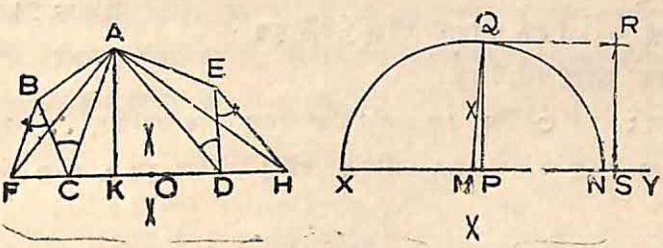
সংকেত : AB প্রদত্ত সরলরেখা ও P প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু লইয়া অনুসিদ্ধান্ত (1)-এর মত কর।

সম্পাদ্য 10

কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বা বহুভুজের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

[To construct a square equal in area to a given rectilineal figure (or a given polygon)]

মনে কর, ABCDE একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র। ইহার সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।



চিত্র নং 23

অঙ্কন : AC ও AD যোগ কর। BF ∥ AC এবং EH ∥ AD টান, উহারা যেন CD-র বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে F ও H বিন্দুতে ছেদ করিল। AF ও AH যোগ কর এবং AK⊥FH টান। AK হইল △AFH-এর উচ্চতা। FHকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। XY সরলরেখা হইতে XP=FO এবং PN=AK কাটিয়া লও। XNকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর, XN-এর মধ্যবিন্দু M লও। PQ⊥XY টান, PQ যেন অর্ধবৃত্তের পরিধিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ-এর উপর একটি বর্গক্ষেত্র PQRS অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ : ∵ △ACF ও △ABC একই ভূমি AC-র উপর এবং AC ও BF সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত, ∴ △ABC=△ACF.

অনুরূপে, △ADE=△ADH.

∴ △ABC+△ADC+△ADE=△ACF+△ADC+△ADH

∴ ক্ষেত্র ABCDE=△AFH=$\frac{1}{2}$FH.AK=FO.AK.

আবার, $P^2Q = QM^2 - PM^2$ (∵ ∠P সমকোণ)

$= MX^2 - PM^2$ (∵ MX=QM=ব্যাসার্ধ)

$= (MX+PM)(MX-PM) = (MX+PM)(MN-PM)$

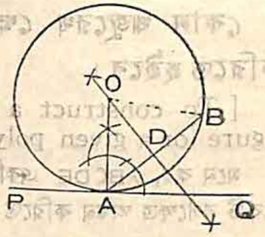
$= PX.PN = FO.AK =$ ক্ষেত্র ABCDE.

∴ PQ-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র = ABCDE ঋজুরেখ ক্ষেত্র।

বৃত্তাঙ্কন

উদা. 1. একটি সরলরেখাকে উহার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

মনে কর, PQ সরলরেখাকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং প্রদত্ত B বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং 24

অঙ্কন : AO⊥PQ টান এবং AB যোগ করিয়া উহার লম্বসমদ্বিখণ্ডক DO টান। AO এবং DO যেন O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। এক্ষণে Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : ∵ O বিন্দু AB-র লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত, ∴ OA=OB ; সুতরাং Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে।

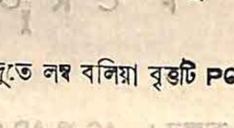
আবার, PQ সরলরেখা ব্যাসার্ধ OA-র উপর A বিন্দুতে লম্ব বলিয়া বৃত্তটি PQকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

উদা. 2. একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত কর।

সঙ্কেত : মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ। উহার যে কোন দুই বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক টান। উহারা যেন S বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। Sকে কেন্দ্র করিয়া SA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত। [প্রমাণ সহজ]

উদা. 3. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং ব্যাসার্ধ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হইবে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

মনে কর, A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r প্রদত্ত ব্যাসার্ধ।



চিত্র নং 25

অঙ্কন : AB যোগ কর। A ও Bকে কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র একই পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ আঁক। চাপ দুইটি যেন O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। এক্ষণে Oকে কেন্দ্র করিয়া OA-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত। [প্রমাণ সহজ]

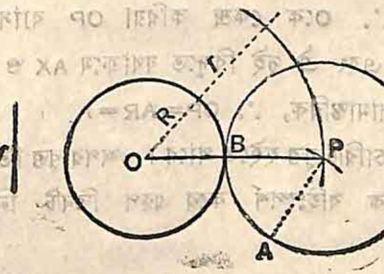
[**দ্রষ্টব্য :** (1) এইরূপ আর একটি বৃত্ত আঁকা যায়। কারণ, A ও Bকে কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত চাপ দুইটি O-এর বিপরীত দিকে আর একটি বিন্দুতে (ধর P) পরস্পর ছেদ করিবে। Pকে কেন্দ্র করিয়া PA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

(2) AB-র অর্ধেক অপেক্ষা r ক্ষুদ্রতর হইলে অঙ্কন অসম্ভব হইবে।]

উদা. 4. নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন তাহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

মনে কর, O প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র, A নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ।

অঙ্কন : মনে কর, R প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ। Oকে কেন্দ্র করিয়া $R+r$ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক এবং Aকে কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ আঁক। উভয় চাপ যেন P বিন্দুতে ছেদ করিল। OP যোগ কর, উহা বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে, Pকে কেন্দ্র করিয়া PB ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।



চিত্র নং 26

প্রমাণ : $OP=R+r$, এবং $OB=R$, $\therefore$ $PB=r=PA$.

$\therefore$ ঐ বৃত্তটি B ও A বিন্দু দিয়া যাইবে। আবার বৃত্ত দুইটি উহাদের কেন্দ্র-সংযোজক সরলরেখা OP-র উপর B বিন্দুতে মিলিত হওয়ায় উহারা ঐ বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে। [ঐরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব ?]

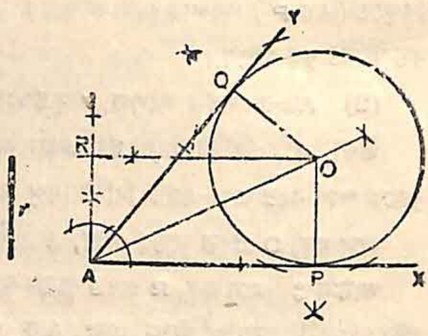
উদা. 5. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে ও একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কিত কর।

সঙ্কেত : মনে কর, PQ প্রদত্ত সরলরেখা, O এবং R প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ এবং r উদ্দিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ। PQ হইতে r দৈর্ঘ্য একক দূরে PQ-এর সমান্তরাল XY রেখা আঁক। Oকে কেন্দ্র করিয়া $R+r$ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন XYকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে A বা Bকে কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত। [প্রমাণ সহজ]

উদা. 6. দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কন কর।

AX ও AY দুইটি ছেদী সরলরেখা এবং r প্রদত্ত ব্যাসার্ধ।

অঙ্কন ঃ ∠Aকে AO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। AR⊥AX টান যেন AR=r হয়। R হইতে AX-এর সমান্তরাল RG টান, উহা যেন AOকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। OP⊥AX এবং OQ⊥AY টান।



চিত্র নং 27

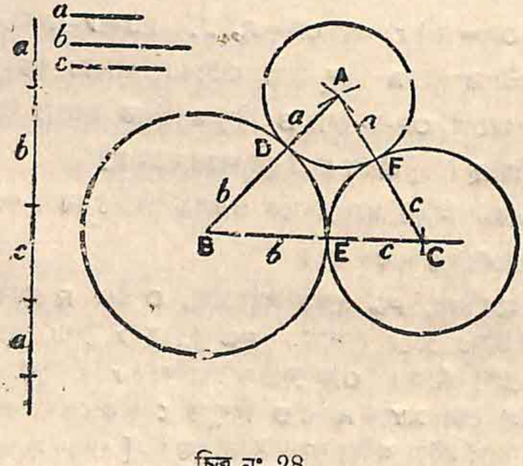
এখন Oকে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ ঃ ∵ AO, A-কোণের সমদ্বিখণ্ডক, ∴ OP=OQ এবং উহারা AX ও AY-এর উপর লম্ব। ∴ Oকে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত P ও Q বিন্দু দিয়া যাইবে এবং ঐ দুই বিন্দুতে যথাক্রমে AX ও AYকে স্পর্শ করিবে। এখন ∵ APOR একটি সামান্তরিক, ∴ OP=AR=r.

[দ্রষ্টব্য ঃ—এইরূপ চারিটি বৃত্ত হইতে পারে। অপর বৃত্ত তিনটি আঁক।]

উদা. 7. পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে এরূপ তিনটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কিত কর।

মনে কর, a, b, c তিনটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ।



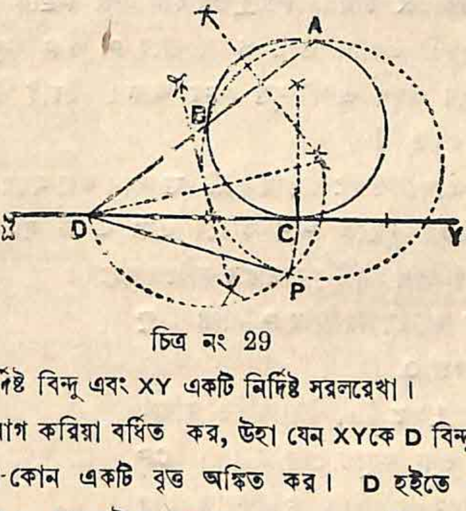
চিত্র নং 28

অঙ্কন : ABC এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর যেন $AB=a+b$, $BC=b+c$ এবং $CA=c+a$ হয় ; A, B, Cকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে a, b ও c ব্যাসার্ধ লইয়া তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাদের দুই দুইটি যেন D, E, F বিন্দুতে পরস্পর মিলিত হইল। উহারাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : ∵ $AB=a+b$ এবং $AD=a$, $BD=b$,

∴ A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক AB সরলরেখার উপর D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। অতএব, উহারা D বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে। অনুরূপে B ও C কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় E বিন্দুতে এবং C ও A কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় F বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে।

উদা. 8. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।



চিত্র নং 29

A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

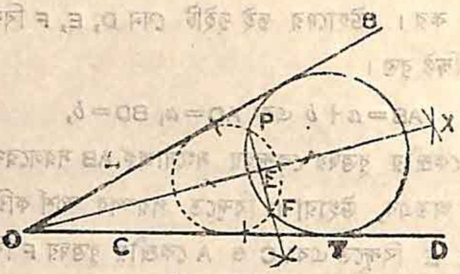
অঙ্কন : AB যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন XYকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। A ও B বিন্দু দিয়া যে-কোন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। D হইতে এই বৃত্তের একটি স্পর্শক DP অঙ্কিত কর। DY হইতে DP-র সমান DC কাটিয়া লও। এক্ষণে, A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল।

প্রমাণ : ABP বৃত্তের AB জ্যা ও DP স্পর্শক D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে,
∴ $DB.DA=DP^2=DC^2$ (∵ $DC=DP$)।

∴ ABC বৃত্তকে DC স্পর্শ করিয়াছে। ∴ ABC বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

[**দ্রষ্টব্য :**—(1) যদি DX হইতে $DK=DP$ কাটা হয়, তবে A, B, K দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত আর একটি উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে। (2) A ও B যোগ করিয়া $AB \parallel XY$ হইলে AB-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের সহিত XY-এর ছেদবিন্দু C লইবে। (3) A ও B, XY-এর পরস্পর বিপরীত দিকে হইলে এরূপ বৃত্তাঙ্কন সম্ভব নহে।]

উদা. 9. দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।



চিত্র নং 30

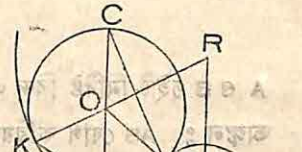
AB ও CD দুইটি সরলরেখা এবং P নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন : BA ও DCকে বর্ধিত কর, উহারা যেন O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। ∠O-এর সমদ্বিখণ্ডক OX টান। PE⊥OX টান এবং PEকে F পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন EF=PE হয়। এখানে উদা. 8 অনুসারে P ও F বিন্দু দিয়া যাইবে এবং CDকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত PFT আঁক। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত। [প্রমাণ ঠিক পূর্ব উদাহরণের মত।]

[**দ্রষ্টব্য** :—এক্ষেত্রেও পূর্বের ন্যায় দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব।]

উদা. 10. একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং একটি সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, XY সরলরেখার উপর P নির্দিষ্ট বিন্দু এবং প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O.



চিত্র নং 31

অঙ্কন : OD⊥XY টান, উহা বর্ধিত করিলে পরিধিকে যেন C ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। CP যোগ কর, উহা যেন পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ⊥XY টান। OE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন PQ-কে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। Qকে কেন্দ্র করিয়া QP ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : ∵ CD ও QP উভয়েই XY-এর উপর লম্ব, ∴ CD ∥ PQ,
∴ ∠OCE=একান্তর ∠EPQ. আবার, ∠OCE=∠OEC (∵ OC=OE)
=∠QEP. ∴ ∠QEP=∠EPQ, ∴ QE=PQ.

অতএব, Qকে কেন্দ্র করিয়া QP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত P ও E বিন্দু দিয়া যাইবে। ∵ ব্যাসার্ধ QP⊥XY, ∴ বৃত্তটি XYকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

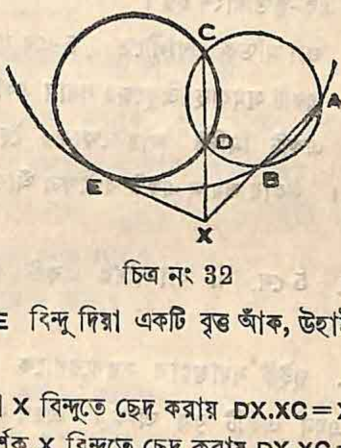
∵ বৃত্ত দুইটি কেন্দ্র-সংযোজক রেখা QO-এর উপর E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, ∴ E বিন্দুতে উভয়ের সাধারণ স্পর্শক আছে, ∴ বৃত্তদ্বয় E বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে।

[দ্রষ্টব্য : OD রেখা বৃত্তকে F বিন্দুতেও ছেদ করিয়াছে। মনে কর, PF সরলরেখা পরিধিকে K বিন্দুতে ছেদ করিল। KO বর্ধিত করিলে উহা PQকে যেন R বিন্দুতে ছেদ করিল। R-কে কেন্দ্র করিয়া এবং RP ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত আঁকলে উহাও উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।]

উদা. 11. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত আঁকিতে হইবে। [C. U. '10, '33]

মনে কর, CDE নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন : A ও B বিন্দু দিয়া এরূপ একটি বৃত্ত আঁক যেন উহা প্রদত্ত বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। CD ও AB যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহারা যেন X বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করল। X হইতে CDE বৃত্তে XE স্পর্শক আঁক। A, B ও E বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত আঁক, উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল।



চিত্র নং 32

প্রমাণ : ABDC বৃত্তের AB ও CD জ্যা X বিন্দুতে ছেদ করায় DX.XC = XB.XA. আবার, CDE বৃত্তের CD জ্যা ও XE স্পর্শক X বিন্দুতে ছেদ করায় DX.XC = EX^2. ∴ EX^2 = XB.XA. EX, ABE বৃত্তের স্পর্শক। এক্ষণে ABE ও CDE বৃত্তের E বিন্দুতে EX সাধারণ স্পর্শক হওয়ায় উভয় বৃত্ত E বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

∴ ABE বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

[দ্রষ্টব্য : X বিন্দু হইতে প্রদত্ত বৃত্তে আর একটি স্পর্শক XF টানা যায়। A, B, F দিয়া অঙ্কিত বৃত্তও উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।]

উদা. 12. একটি বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে। [C. U.]

(উদা. 10-র চিত্র দেখ।) মনে কর, XY প্রদত্ত সরলরেখা, প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং E পরিধিস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু। OD⊥XY টান, DOকে বর্ধিত করিয়া পরিধিকে C

বিন্দুতে ছেদ কর। CE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা XYকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। $PQ \perp XY$ টান। OE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন PQকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। Qকে কেন্দ্র করিয়া QP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

[ঐরূপ আর একটি বৃত্ত হইতে পারে। সেই বৃত্তটি আঁক।]

Exercise 2

1. একটি ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্ত অঙ্কিত কর।

2. একটি ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত কর।

3. দুইটি সমান বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।

4. কোন বৃত্তে একটি সুষম দশভুজ অঙ্কিত কর।

5. একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত সুষম দ্বাদশভুজ আঁক।

6. এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন উহার ভূমিসংলগ্ন কোণ শীর্ষ-কোণের এক-তৃতীয়াংশ হয়।

7. জ্যামিতিক প্রণালীতে $\sqrt{5}$-এর মান নির্ণয় কর।

8. একটি সমবাহু ত্রিভুজের সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক।

9. একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 2·5 সে. মি. ও 1·5 সে. মি.। উহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক এবং তাহার বাহুর পরিমাণ নির্ণয় কর।

[উত্তর = 1·93 সে. মি.]

10. 5 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি অন্তর্লিখিত সুষম অষ্টভুজ আঁক। [C. U. '35]

11. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এমন একটি বৃত্ত আঁক। এরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কন করা যায় এবং কখন অঙ্কন ব্যর্থ হয়?

12. দুইটি ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং কেন্দ্র কোন নির্দিষ্ট সরল রেখায় থাকিবে এরূপ একটি বৃত্ত আঁক।

13. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় কেন্দ্র থাকিবে এবং ঐ রেখায় কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

14. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ও উহাদের একটি নির্দিষ্ট ছেদককে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত আঁক। এরূপ কয়টি বৃত্ত হইবে?

15. দুইটি নির্দিষ্ট ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং পরস্পর স্পর্শ করিবে এরূপ ধারাবাহিক বৃত্ত অঙ্কিত কর।

16. 2 সে. মি. ব্যাসার্ধের বৃত্তে একটি অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর এবং উহার বাহুর পরিমাণ মাপিয়া বল। [উঃ 2·82 সে. মি.] [C. U. '51]

17. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে, একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় কেন্দ্র থাকিবে এবং একটি সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

18. 4·8 সে. মিটার দীর্ঘ AB সরলরেখার A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ 3 সে. মিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। বৃত্তটির কেন্দ্র হইতে AB রেখার লম্বদূরত্ব কত ? [উত্তর = 1·8 সে. মি.] [W. B. S. F. '52]

19. AB সরলরেখা হইতে 4·5 সে. মিটার দূরে P একটি বিন্দু আছে। ঐ বিন্দু দিয়া যাইবে এবং AB-কে স্পর্শ করিবে এরূপ 3 2 সে. মিটার ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। [W. B. S. F. '53]

20. একটি ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্ত অঙ্কিত কর।

21. একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং একটি বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

কয়েকটি অতিরিক্ত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

উদা. 1. ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে ছেদ করিলে উহার অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রটি ভূমির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র এবং ঐ সমদ্বিখণ্ডকের বর্গের সমষ্টির সমান হইবে। [G. U. '51]

△ABCর BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক AD ভূমি BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $AB.AC = BD.CD + AD^2$.



অঙ্কন : △AECর পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। ADকে বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। EC যোগ কর।

প্রমাণ : $\angle BAD = \angle CAE$ (স্বীকার),

চিত্র নং 33

এবং $\angle B = \angle E$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ বলিয়া),

সুতরাং অবশিষ্ট $\angle ADB = \angle ACE$. $\therefore$ △AED ও △ABC সদৃশকোণী,

$\therefore$ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

$\therefore \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC}$, $\therefore$ $AB.AC = AE.AD = (AD + DE).AD$

$= AD^2 + DE.AD = AD^2 + BD.CD$ ($\because$ $AD.DE = BD.CD$).

বিন্দুতে ছেদ কর। CE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা XYকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। $PQ \perp XY$ টান। OE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন PQকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। Qকে কেন্দ্র করিয়া QP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

[ঐরূপ আর একটি বৃত্ত হইতে পারে। সেই বৃত্তটি আঁক।]

Exercise 2

1. একটি ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্ত অঙ্কিত কর।

2. একটি ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত কর।

3. দুইটি সমান বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।

4. কোন বৃত্তে একটি সুষম দশভুজ অঙ্কিত কর।

5. একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত সুষম দ্বাদশভুজ আঁক।

6. এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন উহার ভূমিসংলগ্ন কোণ শীর্ষ-কোণের এক-তৃতীয়াংশ হয়।

7. জ্যামিতিক প্রণালীতে $\sqrt{5}$-এর মান নির্ণয় কর।

8. একটি সমবাহু ত্রিভুজের সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক।

9. একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 2·5 সে. মি. ও 1·5 সে. মি.। উহার সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক এবং তাহার বাহুর পরিমাণ নির্ণয় কর।

[উত্তর = 1·93 সে. মি.]

10. 5 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি অন্তর্লিখিত সুষম অষ্টভুজ আঁক। [C. U. '35]

11. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এমন একটি বৃত্ত আঁক। এরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কন করা যায় এবং কখন অঙ্কন ব্যর্থ হয় ?

12. দুইটি ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং কেন্দ্র কোন নির্দিষ্ট সরল রেখায় থাকিবে এরূপ একটি বৃত্ত আঁক।

13. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় কেন্দ্র থাকিবে এবং ঐ রেখায় কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

14. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ও উহাদের একটি নির্দিষ্ট ছেদককে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত আঁক। এরূপ কয়টি বৃত্ত হইবে ?

15. দুইটি নির্দিষ্ট ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং পরস্পর স্পর্শ করিবে এরূপ ধারাবাহিক বৃত্ত অঙ্কিত কর।

16. 2 সে. মি. ব্যাসার্ধের বৃত্তে একটি অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর এবং উহার বাহুর পরিমাণ মাপিয়া বল। [উ: 2·82 সে. মি.] [C. U. '51]

17. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে, একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় কেন্দ্র থাকিবে এবং একটি সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

18. 4·8 সে. মিটার দীর্ঘ AB সরলরেখার A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ 3 সে. মিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। বৃত্তটির কেন্দ্র হইতে AB রেখার লম্বদূরত্ব কত? [উত্তর = 1·8 সে. মি.] [W. B. S. F. '52]

19. AB সরলরেখা হইতে 4·5 সে. মিটার দূরে P একটি বিন্দু আছে। ঐ বিন্দু দিয়া যাইবে এবং AB-কে স্পর্শ করিবে এরূপ 3 2 সে. মিটার ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। [W. B. S. F. '53]

20. একটি ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্ত অঙ্কিত কর।

21. একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং একটি বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

কয়েকটি অতিরিক্ত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

উদা. 1. ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে ছেদ করিলে উহার অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রটি ভূমির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র এবং ঐ সমদ্বিখণ্ডকের বর্গের সমষ্টির সমান হইবে। [G. U. '51]

△ABC-র BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক AD ভূমি BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $AB.AC = BD.CD + AD^2$.



চিত্র নং 33

অঙ্কন: △AEC-র পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। AD-কে বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। EC যোগ কর।

প্রমাণ: $\angle BAD = \angle CAE$ (স্বীকার),

এবং $\angle B = \angle E$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ বলিয়া),

সুতরাং অবশিষ্ট $\angle ADB = \angle ACE$. ∴ △AED ও △ABC সদৃশকোণী,

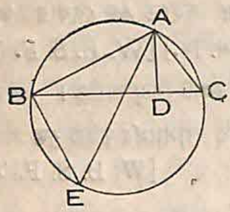
∴ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

∴ $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$, ∴ $AB.AC = AE.AD = (AD + DE).AD$

$= AD^2 + DE.AD = AD^2 + BD.CD$ (∵ $AD.DE = BD.CD$).

উদা. 2. [**ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য**] ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে উহার অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ লম্ব ও পরিবৃত্তের ব্যাসের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান। [C. U. '36 Sup.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজে BC-র উপর AD লম্ব এবং AE ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের একটি ব্যাস। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB.AC = AD.AE.



চিত্র নং 34

প্রমাণ : BE যোগ কর। △ABE ও △ADCএর ∠E = ∠C (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ বলিয়া) এবং অর্ধবৃত্তস্থ ∠ABE = এক সমকোণ = ∠ADC,

∴ △ABE ও △ADC সদৃশকোণী,

∴ $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$, ∴ AB.AC = AD.AE.

অনুসিদ্ধান্ত : যদি ত্রিভুজের বাহুগুলি a, b, c দ্বারা এবং উহার ক্ষেত্রফল S ও পরিব্যাসার্ধ R দ্বারা সূচিত হয়, তবে $R=\frac{abc}{4S}$ হইবে।

△ABCর ক্ষেত্রফল $S=\frac{1}{2}BC.AD$. ∴ $4S=2BC.AD=2a.AD$.

উপরের উপপাদ্য অনুসারে AE.AD = AB.AC, অর্থাৎ $2R.AD=c.b$,

$$\therefore\ 2R=\frac{bc}{AD}=\frac{abc}{a.AD},\quad \therefore\ R=\frac{abc}{2a.AD}=\frac{abc}{4S}.$$

উদা. 3. [**টলেমির উপপাদ্য**] বৃত্তস্থ চতুভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র দুই দুইটি বিপরীত বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

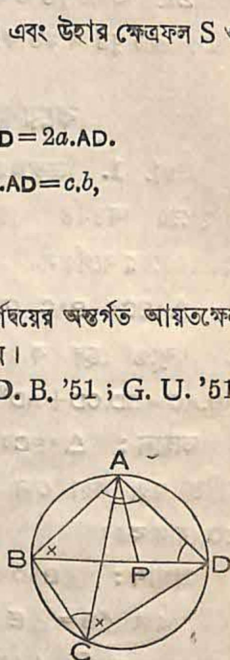
[C. U. ; D. B. '51 ; G. U. '51]

ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AC.BD = AB.CD + BC.AD.

অঙ্কন : ∠BACর সমান ∠DAP আঁক, AP যেন BDকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : ∵ ∠BAC = ∠PAD, ∴ উভয়পক্ষে ∠PAC যোগ করিলে ∠BAP = ∠CAD হইল।



চিত্র নং 35

∠ABD = ∠ACD (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া), ∴ △ABP ও △ACDএর অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান, ∴ উহারা সদৃশকোণী। ∴ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী। ∴ $\frac{BP}{CD}=\frac{AB}{AC}$ ∴ BP.AC = CD.AB......(1)

আবার, $\triangle APD$ ও ABCএর $\angle ADP = \angle ACB$ (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া) এবং $\angle PAD = \angle BAC$ (অঙ্কন), সুতরাং অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান; ∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। ∴ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

$\therefore \ \frac{PD}{BC} = \frac{AD}{AC}, \ \therefore \ PD.AC = BC.AD \ldots (2)$

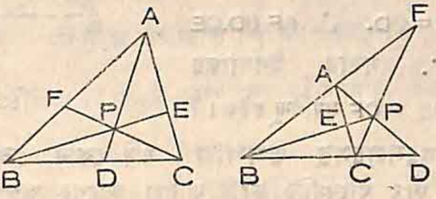
এক্ষণে (1) ও (2) যোগ করিলে $BP.AC + PD.AC = AB.CD + BC.AD$,

কিন্তু $BP.AC + PD.AC = AC.(BP + PD) = AC.BD$,

$\therefore \ AC.BD = AB.CD + BC.AD.$

উদা. 4. [সিভার উপপাদ্য] যদি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির (বা বর্ধিত বিপরীত বাহুগুলির) উপর অঙ্কিত সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু হয়, তবে বাহুগুলির বিভক্ত অংশদ্বয়ের অনুপাত তিনটির গুণফল 1 হইবে।

[**অথবা,** ঐ বাহুগুলির পরপর একান্তর অংশ তিনটির গুণফল অপর তিনটি অংশের গুণফলের সমান হইবে।] [C. U. '40]



চিত্র নং 36

$\triangle ABC$র A, B ও C শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে তিনটি সমবিন্দু সরলরেখা যথাক্রমে BC, AC ও ABকে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$

প্রমাণ: $\triangle ABP$ ও $\triangle BPC$ একই ভূমি BPর উপর অবস্থিত,

$\therefore \ \frac{\triangle ABP}{\triangle BPC} = \frac{AE}{CE}$* অনুরূপে $\frac{\triangle BPC}{\triangle APC} = \frac{BF}{AF}$ এবং $\frac{\triangle APC}{\triangle ABP} = \frac{CD}{BD}$.

এক্ষণে এই অনুপাত তিনটি গুণ করিয়া পাই

$\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = \frac{\triangle ABP}{\triangle BPC} \cdot \frac{\triangle BPC}{\triangle APC} \cdot \frac{\triangle APC}{\triangle ABP} = 1.$

$\therefore \ \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$

[**দ্রষ্টব্য:** (ক) C. U. '40তে প্রদত্ত প্রশ্নের উত্তরে আর একটু এই লিখিতে হইবে, ∴ $BD.CE.AF = DC.AE.BF$.

*(খ) একই ভূমিস্থ ত্রিভুজদ্বয়ের অনুপাত উহাদের শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা ভূমিদ্বারা যে দুই অংশে বিভক্ত হয়, সেই অংশদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

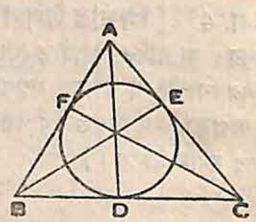
উদাহরণ 4এ এই উপপাদ্যের সাহায্য লওয়া হইয়াছে। দেখ, △ABP ও △BPC শীর্ষবিন্দু A ও C-র সংযোজক রেখা AC ; উহাকে উভয়ের সাধারণ BP ভূমি (বর্ধিত) E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

∴ ত্রিভুজদ্বয়ের অনুপাত = AE : CE হইল।

(গ) সিভার উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্যও প্রমাণ করা যায়।

(ঘ) △ABCর অন্তর্বৃত্ত BC, CA, AB বাহুকে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, AD, BE, CF সমবিন্দু। [C. U. '40]

FED বৃত্তটি △ABCর বাহুগুলিকে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD, BE ও CF সমবিন্দু।

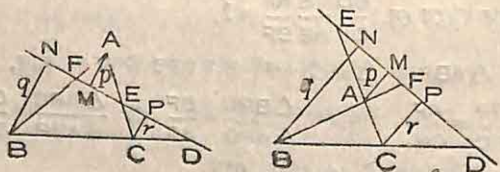


চিত্র নং 37

প্রমাণ : ∵ A বিন্দু হইতে AF ও AE বৃত্তের দুইটি স্পর্শক, ∴ AF = AE ; অনুরূপে, BD = BF এবং CE = CD. ∴ AF.BD.CE = AE.BF.CD. ∴ সিভার উপপাদ্যের বিপরীতক্রমে AD, BE ও CF সমবিন্দু হইল।]

উদা. 5. [মেনেলসের উপপাদ্য] যদি কোন ভেদক ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে ছেদ করে, তবে বাহুগুলির দুইটি করিয়া অংশের অনুপাত তিনটির গুণফল 1 হইবে।

[অথবা, কোন ভেদক ত্রিভুজের বাহুত্রয়কে (বা বর্ধিত বাহুত্রয়কে) ছেদ করিলে পরপর তিনটি একান্তর অংশের গুণফল অপর অংশ তিনটির গুণফলের সমান হয়।]



চিত্র নং 38

মনে কর, DEF ভেদক △ABC-র BC, CA ও BA বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

অঙ্কন : ভেদকটির উপর AM, BN ও CP লম্ব টান। মনে কর, AM = p, BN = q এবং CP = r দৈর্ঘ্য একক।

প্রমাণ : ∵ CP ও BN, DF-এর উপর লম্ব, ∴ CP ∥ BN, সুতরাং

$\triangle$BND ও $\triangle$CPD সদৃশকোণী, ∴ $\frac{BD}{CD}=\frac{q}{r}$.

অনুরূপে $\triangle$CPE ও $\triangle$AME সদৃশকোণী, ∴ $\frac{CE}{AE}=\frac{r}{p}$,

এবং $\triangle$AMF ও $\triangle$BNF সদৃশকোণী, ∴ $\frac{AF}{BF}=\frac{p}{q}$.

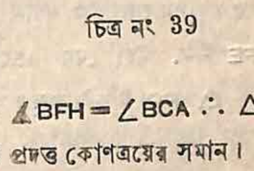
এই অনুপাতগুলির গুণফল লইলে পাই,

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{q}{r}\cdot\frac{r}{p}\cdot\frac{p}{q}=1$$

সম্পাদ্য সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান

সম্পাদ্য (ক) ত্রিভুজের তিনটি কোণ এবং দুইটি বাহুর অন্তরফল দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [C. U. '50]

অঙ্কন : মনে কর, d ত্রিভুজের দুই বাহুর অন্তর। প্রদত্ত কোণ তিনটির সমান কোণ বিশিষ্ট যে-কোন $\triangle$ABC আঁক। AB হইতে AD=AC কাট এবং DC যোগ কর॥ BD হইতে BE=d কাট এবং EF ∥ DC টান, EF যেন BC-কে F বিন্দুতে ছেদ করিল। FH ∥ CA টান, উহা AE-কে H বিন্দুতে ও DC-কে K বিন্দুতে ছেদ করিল। BFH উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।



চিত্র নং 39

প্রমাণ : ∵ HF ∥ AC, ∴ ∠BHF=∠A, ∠BFH=∠BCA ∴ $\triangle$BFH ও $\triangle$ABC সদৃশকোণী, ∴ $\triangle$BFH-এর কোণত্রয় প্রদত্ত কোণত্রয়ের সমান।

আবার, ∵ AD=AC, ∴ ∠ADC=∠ACD.

∵ HF ∥ AC, ∴ ∠DKH=∠ACD=∠HDK.

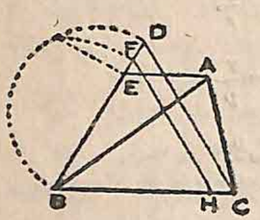
∵ DK ∥ EF, ∴ ∠HDK=∠HEF এবং ∠HKD=∠HFE,

∴ ∠HEF=∠HFE, ∴ HE=HF,

∴ BH−HF=BE=d.

(খ) একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

[C. U, '39 Sup. ; '50 (High)]



চিত্র নং 40

প্রদত্ত $\triangle ABC$, ইহার সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন : BCর উপর DBC সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। AE ∥ CB টান, উহা BDকে যেন E বিন্দুতে ছেদ করিল। BD হইতে BE ও BDর মধ্যসমানুপাতীর সমান BF অংশ কাট।

FH ∥ DC টান, উহা যেন BCকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। $\triangle BFH$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\because$ FH ∥ DC, $\therefore$ $\angle BFH = \angle D$, $\angle BHF = \angle DCB$,
$\therefore$ $\triangle BFH$ ও $\triangle DBC$ সদৃশকোণী, $\therefore$ $\triangle BFH$ সমবাহু।

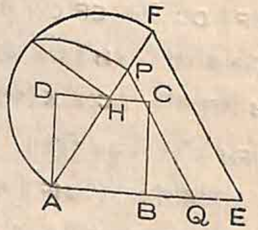
$\therefore$ $\dfrac{\triangle BFH}{\triangle BDC} = \dfrac{BF^2}{BD^2} = \dfrac{BE.BD}{BD^2}$ ($\because$ BF, BE ও BDর মধ্যসমানুপাতী) $= \dfrac{BE}{BD}$,

আবার, EC যোগ করিলে $\dfrac{\triangle BEC}{\triangle BDC} = \dfrac{BE}{BD}$. $\therefore$ $\dfrac{\triangle BFH}{\triangle BDC} = \dfrac{\triangle BEC}{\triangle BDC}$.

$\therefore$ $\triangle BFH = \triangle BEC$; কিন্তু $\triangle BCE = \triangle ABC$ (কারণ, উহারা একই ভূমির উপর দুই সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত). $\therefore$ $\triangle BFH = \triangle ABC$.

(গ) একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

প্রদত্ত ABCD বর্গের AB বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন BE = AB হয়। AEর উপর AEF সমবাহু ত্রিভুজ আঁক, AF যেন DCকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। AF হইতে AH ও AFএর মধ্যসমানুপাতীর সমান AP অংশ কাট। PQ ∥ FE টান. উহা যেন AEকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। $\triangle APQ$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।



চিত্র নং 41

প্রমাণ : $\because$ PQ ∥ FE,
$\therefore$ $\triangle APQ$ ও $\triangle AFE$ সদৃশকোণী, $\therefore$ $\triangle APQ$ সমবাহু।

$\therefore$ $\dfrac{\triangle APQ}{\triangle AFE} = \dfrac{AP^2}{AF^2} = \dfrac{AH.AF}{AF^2}$ ($\because$ AP, AH ও AFএর মধ্যসমানুপাতী) $= \dfrac{AH}{AF}$.

HE যোগ করিলে $\dfrac{\triangle AHE}{\triangle AFE} = \dfrac{AH}{AF}$, $\therefore$ $\dfrac{\triangle APQ}{\triangle AFE} = \dfrac{\triangle AHE}{\triangle AFE}$, $\therefore$ $\triangle APQ = \triangle AHE$.

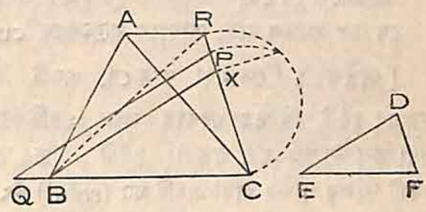
আবার, ∵ △AHE ও বর্গক্ষেত্র ABCD দুই সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত এবং ত্রিভুজটির ভূমি বর্গক্ষেত্রটির ভূমির দ্বিগুণ,

∴ △AHE = ABCD বর্গক্ষেত্র। ∴ সমবাহু ত্রিভুজ APQ = ABCD বর্গক্ষেত্র।

(ঘ) একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং অন্য একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ABC ও DEF দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। △ABCর সমান এবং △DEFএর সদৃশ একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন : ∠E ও ∠F-এর সমান করিয়া যথাক্রমে ∠CBX ও ∠BCX আঁক। BX ও CX যেন X বিন্দুতে ছেদ করিল। AR ∥ BC টান, AR যেন CXকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। CX ও CRএর মধ্যসমানুপাতীর সমান CP অংশ কাট। PQ ∥ XB টান, উহা যেন CBকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।



চিত্র নং 42

△PCQ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : BR যোগ কর। ∵ BX ∥ PQ, ∴ △BCX ও △PCQ সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ।

$$\therefore \frac{\triangle PCQ}{\triangle BCX} = \frac{CP^2}{CX^2} = \frac{CX.CR}{CX^2} = \frac{CR}{CX}.$$

আবার, $\frac{\triangle BCR}{\triangle BCX} = \frac{CR}{CX}$ (∵ উহাদের একই উচ্চতা), ∴ $\frac{\triangle PCQ}{\triangle BCX} = \frac{\triangle BCR}{\triangle BCX}$.

∴ △PCQ = △BCR = △ABC (∵ AR ∥ BC), আবার, ∵ BX ∥ PQ,

∴ ∠PQC = ∠XBC = ∠E এবং ∠PCQ = ∠F, ∴ △PCQ ও △DEF সদৃশ।

∴ △PCQ, △ABCর সমান এবং △DEFএর সদৃশ।

ঘন জ্যামিতি

কতিপয় সংজ্ঞা

১। **তল** বা পৃষ্ঠের (surface) দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ আছে কিন্তু বেধ নাই। অতএব তল দ্বিমাত্রিক।

২। তল দ্বারা বেষ্টিত দেশকে **ঘন** (solid) বলে। ইহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ আছে ; সুতরাং ইহা ত্রিমাত্রিক।

৩। তলের উপরিস্থিত যে কোন দুইটি বিন্দু যোগ করিলে যে সরলরেখা পাওয়া যায় তাহা যদি তলের সহিত সম্পূর্ণ মিলিয়া যায়, তবে ঐ তলকে **সমতল** (plane বা plane surface) বলে।

সমতলকে যে কোন দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যায়।

যে তল সমতল নহে, তাহাকে **বক্রতল** (curved surface) বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** তোমরা জান যে, একটি বিন্দুর গতি দ্বারা একটি রেখা উৎপন্ন হয়। অতএব দুইটি বিভিন্ন রেখার মিলন একটি বিন্দুতে হইবে। সেইরূপ, রেখার গতির দ্বারা তল উৎপন্ন হয়, সুতরাং দুইটি বিভিন্ন তল একটি রেখায় মিলিত হয়। আবার, একটি তলের গতির দ্বারা একটি ঘন (solid) উৎপন্ন হয়।]

৪। যে সমস্ত সরলরেখা একই সমতলের উপর অবস্থিত তাহাদিগকে **সামতলিক** বা **একতলীয়** (co-planar) বলে।

দুইটি সরলরেখা দিয়া যদি কোন সমতল আঁকা না যায়, তবে রেখা দুইটিকে **অসামতলিক** (skew) বলে।

এইরূপ সরলরেখাদ্বয় বর্ধিত হইলেও কখন মিলিত হইবে না, অথচ উহারা সমান্তরাল নহে।

উদাহরণ। দুইটি পেনসিল আড়াআড়ি ভাবে একটার উপরে আর একটা ধরিলে অসামতলিক রেখা হয়।

৫। দুইটি **অসামতলিক সরলরেখার** (skew straight lines-এর) **অন্তর্ভূত কোণ :** দুইটি অসামতলিক (skew) সরলরেখার মধ্যে একটি সরলরেখা তাহারই উপরিস্থিত কোন বিন্দু হইতে অপরটির সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে ঐ দুইটি skew সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণ বলা হয়।

মনে কর, AB ও CD দুইটি skew সরলরেখা এবং AB-র উপরিস্থিত যে কোন P বিন্দু হইতে PQ ∥ CD টানা হইল। এক্ষণে AB ও PQ এর মধ্যস্থিত কোণ AB ও CD skew রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ হইবে।

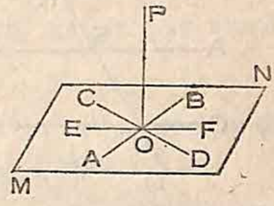
৬। সামতলিক দুইটি সরলরেখা হয় পরস্পর মিলিত হইবে, না হয় সমান্তরাল হইবে।

৭। যদি দুইটি সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত থাকে এবং উহাদিগকে দুই দিকেই বর্ধিত করিলে মিলিত না হয়, তবে উহাদিগকে সমান্তরাল বলা হয়।

৮। একটি সরলরেখা ও একটি সমতল সমান্তরাল হয় যদি তাহাদিগকে যে কোন দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করিলেও কখনও মিলিত না হয়।

৯। দুইটি সমতল সমান্তরাল হয় যদি তাহাদিগকে চারিদিকেই যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করিলে কখনও মিলিত না হয়।

১০। একটি সরলরেখা যদি একটি সমতলের সহিত এমনভাবে মিলিত হয় যে ছেদবিন্দু দিয়া অঙ্কিত ঐ সমতলস্থ প্রত্যেক সরলরেখার উপরেই ঐ সরলরেখাটি লম্ব, তবে ঐ সরলরেখাকে ঐ সমতলের উপরে লম্ব (perpendicular) বলে।



চিত্র নং 43

যে সরলরেখা বা সমতল ওলনদড়ির সমান্তরাল তাহাকে **উল্লম্ব** (vertical) বলা হয়।

উল্লম্বের সহিত লম্ব সমতলকে অনুভূমিক (horizontal) সমতল বলে।

১১। যে চতুর্ভুজের দুইটি সংলগ্ন বাহু এক সমতলে এবং অপর সংলগ্ন বাহুদ্বয় অন্য এক সমতলে অবস্থিত তাহাকে skew quadrilateral বলে।

১২। নিম্নের সিদ্ধান্তগুলিকে **স্বতঃসিদ্ধ** (Axioms) বলিয়া গণ্য করা হয়ঃ

(ক) দুইটি সরলরেখা একটি মাত্র বিন্দুতে মিলিত হইতে (ছেদ করিতে) পারে।

(খ) একটি সরলরেখা কোন সমতলকে একটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে।

(গ) দুইটি বিন্দু দিয়া একটি মাত্র সরলরেখা টানা যায়।

(ঘ) একটি সমতলস্থ দুইটি বিন্দু যোগ করিলে যে সরলরেখা পাওয়া যায় তাহা অনন্ত পর্যন্ত বর্ধিত করিলেও ঐ সমতলের উপর অবস্থিত থাকে।

(ঙ) একটি সমতলকে তাহার উপরিস্থিত কোন সরলরেখাকে অক্ষ ধরিয়া ঘুরাইলে বিশ্বের সমস্ত বিন্দু দিয়াই এই সমতল যাইবে।

(সমতল বলিলে অনন্ত পর্যন্ত বর্ধিত সমতল বুঝিতে হইবে।)

(চ) একটি সরলরেখা দিয়া অসংখ্য সমতল আঁকা যায়।

(ছ) একটি সরলরেখা এবং ইহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু দিয়া একটি মাত্র সমতল আঁকা যায়।

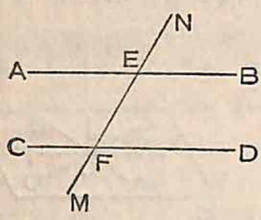
(জ) দুইটি ছেদী সরলরেখা দিয়া একটি এবং কেবল একটি মাত্র সমতল আঁকা যায়।

(ঝ) দুইটি পরস্পরছেদী সমতল একটি সরলরেখায় পরস্পরকে ছেদ করে এবং তাহার বাহিরের কোন বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. যদি একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করে, তবে সরলরেখা তিনটি সামতলিক হইবে।

মনে করা যাক, AB এবং CD এই দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে MN সরলরেখা E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে AB, CD, MN সামতলিক।



চিত্র নং 44

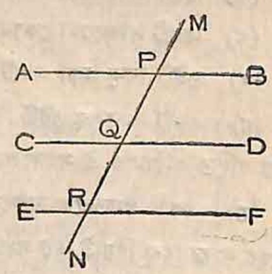
প্রমাণ : যেহেতু AB এবং CD সমান্তরাল, অতএব তাহারা সামতলিক। এখন E এবং F যথাক্রমে AB এবং CD-র উপরে অবস্থিত বিন্দু; অতএব উহারা ঐ সমতলের উপরিস্থিত বিন্দু।

অতএব, EF সরলরেখা অর্থাৎ MN সরলরেখা ঐ সমতলের উপর অবস্থিত [স্বতঃসিদ্ধ (ঘ)] ∴ AB, CD, MN সামতলিক।

উদা. 2. যদি তিনটি বা তদধিক সমান্তরাল সরলরেখা অন্য একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে ছেদ করে, তবে তাহারা সামতলিক হইবে। [C. U. '52, '21]

মনে করা যাক, AB, CD, EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি MN সরলরেখাকে যথাক্রমে P, Q, R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB, CD, EF সামতলিক।

প্রমাণ : AB এবং CD সমান্তরাল বলিয়া ইহাদের মধ্য দিয়া একটি সমতল আঁকা যায়। মনে কর, এই সমতল "p". এখন P এবং Q বিন্দু দুইটি p সমতলের উপর অবস্থিত, সুতরাং PQ সরলরেখা অর্থাৎ MN সরলরেখা ঐ p সমতলের উপর অবস্থিত। অতএব R বিন্দু p সমতলে অবস্থিত।



চিত্র 45

এখন AB এবং EF সমান্তরাল বলিয়া সামতলিক। মনে করা যাক, ইহারা আর একটি সমতল 'q'এর উপর অবস্থিত। অতএব, R বিন্দু q সমতলের উপর অবস্থিত। কিন্তু AB সরলরেখা এবং ইহার বহিঃস্থ R বিন্দু দিয়া দুইটি সমতল p এবং q আঁকা যায় না [স্বতঃসিদ্ধ (ছ)]।

∴ p এবং q একই সমতল।

∴ EF সরলরেখা p সমতলের উপর অবস্থিত হইবে।

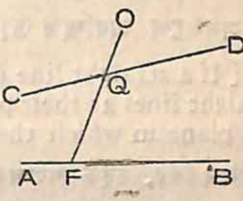
∴ AB, CD, EF সামতলিক।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, যদি AB, CD, EF-এর সমান্তরাল আরও সরলরেখা MN সরলরেখাকে ছেদ করে তবে তাহারাও AB, CD, EF-এর সহিত সামতলিক হইবে।

উদা. 3. কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর সহিত একই সমতলে অবস্থিত নহে এরূপ দুইটি প্রদত্ত সরলরেখাকে ছেদ করিয়া ঐ বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টান।

[C. U. 1912]

মনে করা যাক, O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB ও CD দুইটি প্রদত্ত সরলরেখা। O এবং AB দিয়া একটি সমতল 'm' আঁকা হইল। এই সমতল, মনে করা যাক, CDকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন OQ সরলরেখা m-সমতলের উপর অবস্থিত হইবে, অর্থাৎ OQ এবং AB সরলরেখা সামতলিক। অতএব, ইহারা F বিন্দুতে ছেদ করিবে। অতএব OQ সরলরেখাই নির্ণেয় সরলরেখা।

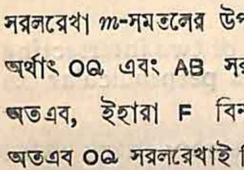


চিত্র নং 46

মন্তব্য : OQ সরলরেখা AB-র সহিত সমান্তরাল হইলে ইহারা ছেদ করিবে না। সে ক্ষেত্রে উক্ত প্রকার কোন সরলরেখাই পাওয়া যাইবে না।

উদা. 4. সমরেখ নহে এরূপ তিনটি সমতলের ছেদ-রেখা তিনটি সমবিন্দু।

মনে করা যাক m, n, p তিনটি সমতল। প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহারা একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।



চিত্র নং 47

প্রমাণ : m ও n সমতলদ্বয় একটি রেখা ABতে ছেদ করিল এবং m ও p সমতল CD রেখায় ছেদ করিল (স্বতঃসিদ্ধ ঝ)। এখন AB ও CD সরলরেখাদ্বয় একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে করা যাক, এই বিন্দু O. অতএব তিনটি সমতল O বিন্দুতে ছেদ করিল।

[দৃষ্টান্ত : ঘরের দুইটি দেওয়াল এবং মেঝে একটি বিন্দুতে মিলত হয়।]

Exercise 1

1. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে ছেদ করিয়া যে সকল সরলরেখা টানা যায়, তাহারা সামতলিক।

2. অসামতলিক তিনটি প্রদত্ত সরলরেখাকে ছেদ করিয়া একটি সরলরেখা টান। [C. U. '11, '13]

3. যে সরলরেখাগুলি পরস্পর ছেদ করিয়াছে তাহারা সামতলিক।

4. দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা উভয়েই অপর একটি সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।

5. যদি কোন সমতল অন্য দুইটি সমান্তরাল সমতলকে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে তাহাদের ছেদরেখাদ্বয় সমান্তরাল।

উপপাদ্য 1

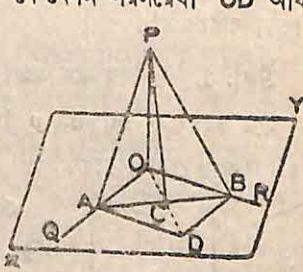
যদি একটি সরলরেখা অন্য দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখার উপর উহাদের ছেদবিন্দুতে লম্ব হয়, তবে ঐ সরলরেখাটি উক্ত সরলরেখাদ্বয় যে সমতলে অবস্থিত তাহার উপরেও লম্ব হইবে।

[If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is perpendicular to the plane in which they lie.]

মনে কর, দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা OQ ও OR উভয়ে XY-সমতলে অবস্থিত এবং OP সরলরেখা OQ ও OR সরলরেখার উপরে O ছেদবিন্দুতে লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OP সরলরেখা XY-সমতলের উপর লম্ব।

অঙ্কন: O বিন্দু দিয়া XY-সমতলের উপর যে-কোন সরলরেখা OD আঁক। D বিন্দু হইতে OQ ও OR-এর সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া OADB সামান্তরিক আঁক। AB যোগ কর, উহা যেন ODকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। PA, PB, PC যোগ কর।



চিত্র নং 48

প্রমাণ: OADB সামান্তরিকের AB ও OD কর্ণদ্বয় C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে,

∴ PC, APB ত্রিভুজের মধ্যমা।

$$\therefore PA^2 + PB^2 = 2AC^2 + 2PC^2 \quad \text{....(1)}$$

অনুরূপে, ∵ OC OAB ত্রিভুজের মধ্যমা,

$$\therefore OA^2 + OB^2 = 2AC^2 + 2OC^2 \quad \text{... (2)}$$

∴ (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$(PA^2 - OA^2) + (PB^2 - OB^2) = 2(PC^2 - OC^2) \quad \text{....(3)}$$

আবার, $\because$ OA ও OBর উপর PO লম্ব, $\therefore$ $\angle POA$ ও $\angle POB$ প্রত্যেকে সমকোণ।

$\therefore$ $PA^2 = OA^2 + OP^2$
এবং $PB^2 = OB^2 + OP^2$

$\therefore$ $PA^2 - OA^2 = OP^2$ এবং $PB^2 - OB^2 = OP^2 \ldots (4)$

অতএব (3) ও (4) হইতে পাই $OP^2 + OP^2 = 2(PC^2 - OC^2)$,

বা, $2OP^2 = 2(PC^2 - OC^2)$,

বা, $OP^2 = PC^2 - OC^2$, $\therefore$ $PC^2 = OP^2 + OC^2$,

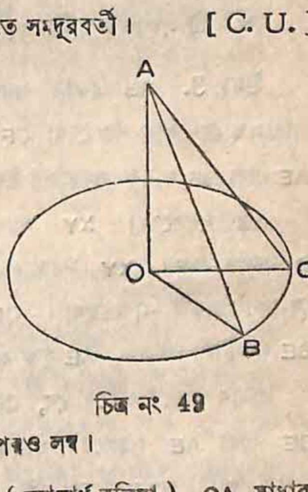
$\therefore$ $\angle POC$ একটি সমকোণ।

$\therefore$ O বিন্দুগামী ও XY-সমতলে অবস্থিত যে কোন সরলরেখা OD-র উপর OP লম্ব হইল।

অতএব, OP সরলরেখা OQ ও OR ধারক XY-সমতলের উপরও লম্ব।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. একটি বৃত্তের কেন্দ্র O হইতে বৃত্তের সমতলের উপরে OA লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে পরিধিস্থ যে-কোন বিন্দু A হইতে সমদূরবর্তী। [C. U.]



চিত্র নং 49

O বৃত্তের কেন্দ্র এবং OA সরলরেখা বৃত্তের সমতলের উপর লম্ব। মনে করা যাক, B এবং C পরিধিস্থ যে-কোন দুইটি বিন্দু। AB, AC যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB = AC,

OB এবং OC যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : $\because$ OB ও OC বৃত্তের সমতলের উপর অবস্থিত এবং OA ঐ সমতলের উপরে লম্ব, $\therefore$ OA সরলরেখা OB এবং OC-র উপরও লম্ব।

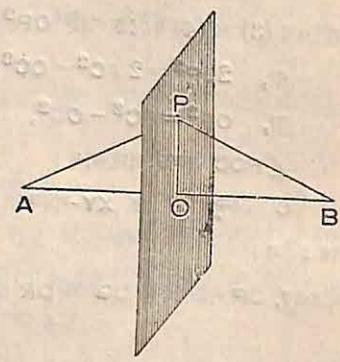
এখন OAB এবং OAC ত্রিভুজদ্বয়ের OB = OC (ব্যাসার্ধ বলিয়া), OA সাধারণ বাহু এবং $\angle AOB = \angle AOC = 1$ সমকোণ। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ AB = AC.

উদা, 2. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী শূন্যস্থ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '39, '47]

মনে কর, A এবং B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। AB যুক্ত করা হইল। মনে কর O, AB-র মধ্যবিন্দু। O বিন্দুর মধ্য দিয়া AB-র উপর লম্ব করিয়া একটি সমতল আঁকা হইল। এই সমতলই নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে।

মনে কর, P ঐ সমতলস্থ যে-কোন বিন্দু। PO, PA, PB যোগ কর।



চিত্র নং 50

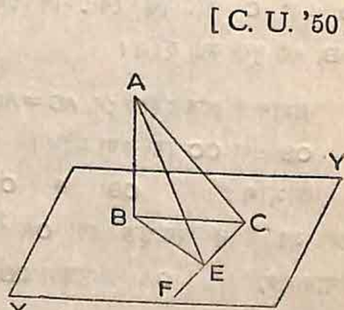
প্রমাণ: যেহেতু PO ঐ সমতলস্থ সরলরেখা এবং OB ঐ সমতলের উপর লম্ব, ∴ OB, PO রেখার উপরে লম্ব। এখন OAP এবং OBP ত্রিভুজদ্বয়ের AO = BO, PO সাধারণ বাহু এবং ∠AOP = ∠BOP = 1 সমকোণ। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ AP = BP. এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে ঐ সমতলস্থ যে-কোন বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী।

∴ ঐ সমতলই উদ্দিষ্ট সঞ্চারপথ।

উদা. 3. AB কোন সমতলের উপর লম্ব। লম্বের পাদবিন্দু B হইতে ঐ সমতলস্থ যে-কোন সরলরেখা CF-এর উপর BE লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে, AE এবং BE ধারক সমতলের উপর CE লম্ব। [C. U. '50]

AB সরলরেখা XY সমতলের উপরে B বিন্দুতে লম্ব। XY সমতলের উপর CF যে-কোন একটি সরলরেখা। CF-এর উপরে BE লম্ব টানা হইল। AE যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, CE সরলরেখা BE এবং AE সরলরেখা-ধারক সমতলের উপরে লম্ব। AC যুক্ত করা হইল।



চিত্র নং 51

প্রমাণ: AB সরলরেখা BE এবং BC-র উপর লম্ব। এখন ABE সমকোণী ত্রিভুজের $AE^2 = AB^2 + BE^2$ এবং BEC সমকোণী

ত্রিভুজের $EC^2 = BC^2 - BE^2$, $\therefore$ $AE^2 + EC^2 = AB^2 + BE^2 + BC^2 - BE^2$
$= AB^2 + BC^2 = AC^2$ [$\because$ $\angle ABC$ সমকোণ], $\therefore$ $\angle AEC$ সমকোণ।

$\therefore$ CE সরলরেখা AE সরলরেখার উপর লম্ব। কিন্তু CE, BE-র উপর লম্ব;
$\therefore$ CE সরলরেখা AE এবং BE রেখা ধারক সমতলের উপর লম্ব।

Exercise 2

1. কোন সরলরেখার সহিত উহার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব হইবে এরূপ একটি সমতল অঙ্কন কর।

2. সমরেখ নহে এরূপ নির্দিষ্ট তিনটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী শূন্যস্থ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '41]

3. প্রমাণ কর যে, কোন সমতলের উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় করা যায় যাহা ঐ সমতলবহির্ভূত অন্য তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। [C. U. '33]

4. কোন সমতলের বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমতলটির উপর কেবল একটি মাত্র লম্ব আঁকা যায়।

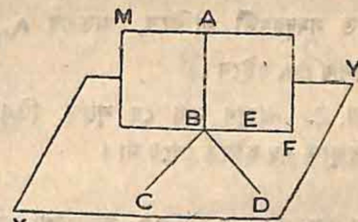
উপপাদ্য 2

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপরিস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বসমূহ সামতলিক।

[All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point in it are co-planar.]

মনে করা যাক BC, BD, BE সরলরেখার প্রত্যেকেই AB সরলরেখার উপর B বিন্দুতে লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BC, BD, BE একতলীয়।



চিত্র নং 52

অঙ্কন: দুইটি ছেদী সরলরেখা দিয়া একটি মাত্র সমতল আঁকা যায়। BC, BD সরলরেখা দিয়া XY সমতল এবং AB, BE দিয়া MF সমতল আঁকা হইল। এই দুইটি সমতল BF সরলরেখাতে ছেদ করিল।

প্রমাণ: যেহেতু AB সরললেখা BC এবং BD-র উপর B বিন্দুতে লম্ব, $\therefore$ AB, XY সমতলের উপর লম্ব। $\therefore$ AB সরলরেখা XY সমতলস্থিত BF-এর উপর লম্ব; কিন্তু AB, BE-র উপর লম্ব, $\therefore$ AB, BE, BF একই সমতলে অবস্থিত থাকিয়া

BE এবং BF সরলরেখাদ্বয় AB-র উপর উহার একই বিন্দুতে লম্ব হইল ;

কিন্তু BE এবং BF একই সরলরেখায় অবস্থিত না থাকিলে ইহা অসম্ভব।

∴ BE, XY সমতলে অবস্থিত থাকিবে।

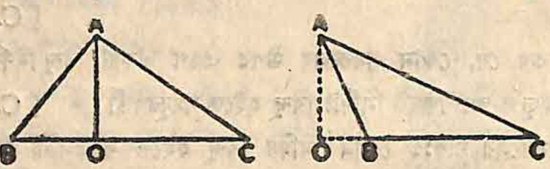
∴ BC, BD, BE তিনটিই XY সমতলে অবস্থিত।

∴ BC, BD, BE একতলীয়।

অনুরূপে, অন্য যে কোন সরলরেখা B বিন্দুতে AB-র উপর লম্ব হইলে তাহাও XY-সমতলে অবস্থিত হইবে।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. ভূমিকে অক্ষ করিয়া যদি একটি ত্রিভুজকে ঘোরান যায় তবে শীর্ষবিন্দু একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। [C. U. '19]



চিত্র নং 53

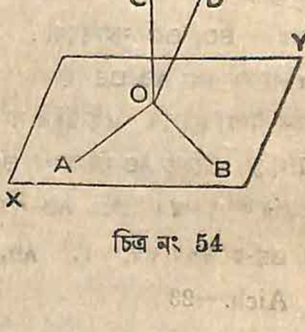
মনে করা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, BCকে অক্ষ করিয়া △ABCকে ঘোরান হইলে A বিন্দু একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। BC-র উপর AO লম্ব অঙ্কিত করা হইল।

প্রমাণঃ ∵ AO⊥BC, ∴ O, BC-র উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। যখন ত্রিভুজটি ঘোরান হইবে তখন AO, BC-র উপর সর্বদা O বিন্দুতে লম্ব থাকিবে।

∴ OA রেখা ঘুরিয়া একটি সমতল অঙ্কিত করিবে। আবার, যেহেতু A বিন্দু O হইতে সমদূরবর্তী থাকিবে, অতএব A একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে যাহার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OA হইবে।

উদা. 2. প্রমাণ কর যে শূন্যস্থ তিনটির অধিক সরলরেখা পরস্পরের উপর একই বিন্দুতে লম্ব হইতে পারে না। [C. U. '32, '36, '48]

মনে কর OA, OB, OC সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পরের উপর লম্ব। যদি সম্ভব হয়, মনে কর OD আর একটি সরলরেখা আঁকা হইল যেন OA, OB, OD পরস্পরের উপর O বিন্দুতে লম্ব হয়। OA এবং OB ধারক XY সমতল আঁক।



চিত্র নং 54

যেহেতু OC রেখা, OA এবং OB-র উপর O বিন্দুতে লম্ব, ∴ OC রেখা সমতল XYএর উপর লম্ব। আবার, যেহেতু OD রেখা, OA এবং OB-র উপর লম্ব, ∴ OD রেখা XY-সমতলের উপর লম্ব।

∴ OC এবং OD সরলরেখা XY সমতলের উপর একই বিন্দুতে লম্ব, কিন্তু ইহা অসম্ভব। ∴ OC এবং OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

∴ তিনটির অধিক সরলরেখা পরস্পরের উপর একই বিন্দুতে লম্ব হইতে পারে না।

Exercise 3

1. প্রমাণ কর যে, একটি সমতলের উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় করা যায় যাহা ঐ সমতলের বহিঃস্থ তিনটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। কোন্ ক্ষেত্রে ইহা অসম্ভব হয়? [C. U. '33

2. একটি উলম্বের কোন বিন্দু দিয়া কতগুলি অনুভূমিক রেখা টানা যায় এবং তাহারা কিরূপভাবে অবস্থিত থাকে? [C. U. '16]

3. প্রমাণ কর যে, একটি অনুভূমিক আয়তক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু চারিটি উহার কেন্দ্রগামী উলম্বের যে-কোন বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী।

4. প্রমাণ কর যে, সমকোণের একটি বাহুকে অক্ষ করিয়া যদি উহাকে ঘোরান হয়, তবে অপর বাহুটি একটি সমতল উৎপন্ন করিবে।

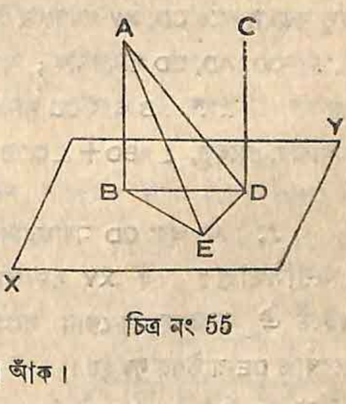
উপপাদ্য 3

দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি যদি কোন সমতলের উপর লম্ব হয়, তবে অপরটিও ঐ সমতলের উপর লম্ব হইবে।

[If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, then the other is also perpendicular to the same plane.]

মনে কর, AB এবং CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা XY-সমতলকে B ও D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং তাহাদের মধ্যে AB সরলরেখা XY-সমতলের উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, CD সরলরেখাও XY সমতলের উপর লম্ব।



চিত্র নং 55

অঙ্কন : BD যোগ কর ; ইহাতে BD রেখা XY-সমতলে অবস্থিত হইল। XY সমতলে BD-র উপর লম্ব করিয়া DE একটি সরলরেখা আঁক।

BE, AE, AD যোগ কর।

প্রমাণ ঃ যেহেতু AB সরলরেখা XY সমতলের উপর লম্ব,

$\therefore$ AB সরলরেখা XY সমতলস্থিত BE এবং BD-র উপর লম্ব।

এখন, $AE^2 = AB^2 + BE^2$ [$\because$ ABE = 1 সমকোণ]

$= AB^2 + BD^2 + DE^2$ [$\because$ $\angle BDE = 1$ সমকোণ]

$= AD^2 + DE^2$ [$\because$ $\angle ABD = 1$ সমকোণ।]

$\therefore$ $\angle ADE$ = এক সমকোণ। $\therefore$ ED রেখা AD রেখার উপর লম্ব।

কিন্তু ED, BD রেখার উপর লম্ব (অঙ্কন)। $\therefore$ ED রেখা BD এবং AD ধারক সমতলের উপর লম্ব।

$\therefore$ AB ∥ CD $\therefore$ AB ও CD রেখাদ্বয় ABD সমতলে অবস্থিত।

কিন্তু CD সরলরেখা, BD এবং AD রেখাধারক সমতলের উপর অবস্থিত, $\therefore$ ED রেখা AB ও CD ধারক সমতলের উপর লম্ব, অর্থাৎ CD রেখা ED রেখার উপরে লম্ব।

আবার, যেহেতু, AB ∥ CD এবং BD উহাদের ছেদক এবং

$\angle ABD = 1$ সমকোণ, $\therefore$ $\angle CDB = 1$ সমকোণ। $\therefore$ $CD \perp BD$.

$\therefore$ CD রেখা BD এবং DE রেখার উপরে লম্ব। কিন্তু BD এবং DE, XY-সমতলের উপরে অবস্থিত,

$\therefore$ CD রেখা XY-সমতলের উপর লম্ব।

বিপরীত উপপাদ্য

যদি দুইটি সরলরেখা একটি সমতলের উপরে লম্ব হয়, তবে তাহারা সমান্তরাল হইবে।

পূর্বের উপপাদ্য 3-এর মত প্রমাণ করা যায় যে, DE, AD-র উপর লম্ব। আবার, যেহেতু কল্পনানুসারে CD, XY সমতলের উপর লম্ব, $\therefore$ ইহা DE-র উপর লম্ব।

$\therefore$ CD, AD, BD সামতলিক ; কিন্তু AB, AD, BD সামতলিক,

$\therefore$ AB এবং CD সামতলিক।

আবার, যেহেতু, $\angle ABD + \angle CDB = 1$ সমকোণ + 1 সমকোণ।

= 2 সমকোণ।

$\therefore$ AB এবং CD সমান্তরাল।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি XY সমতলের উপর AB লম্ব হয় এবং লম্বের পাদবিন্দু B হইতে ঐ সমতলস্থ যে-কোন সরলরেখা DE-র উপর BD লম্ব হয়, তবে AD সরলরেখাও DE-র উপর লম্ব হয়।

[55 নং চিত্রে EDকে F পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন FD = ED হয় এবং BF, AF যোগ

কর। $\triangle BED$ ও $\triangle BFD$ সর্বসম, $\therefore$ $BE=BF$. আবার $\triangle ABE$ ও $\triangle ABF$ সর্বসম, $\therefore$ $AE=AF$. এক্ষণে $\triangle ADE$ ও $\triangle ADF$ এর AD সাধারণ বাহু, $BE=DF$ এবং $AE=AF$, $\therefore$ $\angle ADE=\angle ADF=1$ সমকোণ।

এই সিদ্ধান্তকে "লম্বত্রয়ের সিদ্ধান্ত" বলা হয়।

Exercise 4

1. শূন্যস্থ সরলরেখাসমূহ যদি একই সরলরেখার সমান্তরাল হয়, তবে তাহারা পরস্পর সমান্তরাল। [C. U. '29, '35]

[**সংকেত ঃ** মনে করা যাক, AB এবং CD সরলরেখা উভয়ই PQ সরলরেখার সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB এবং CD সমান্তরাল।

PQ রেখার যে-কোন বিন্দু Q হইতে PQ-এর উপর লম্ব করিয়া XY সমতল আঁকা হইল, ইহা যেন AB ও CDকে B এবং D বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $AB \parallel PQ$ এবং PQ, XY সমতলের উপর লম্ব,

$\therefore$ AB, XY সমতলের উপর লম্ব। তদ্রূপ CD সরলরেখাও XY-এর উপর লম্ব। এখন যেহেতু AB এবং CD রেখা একই সমতল XY-এর উপর লম্ব,

$\therefore$ উহারা পরস্পর সমান্তরাল।]

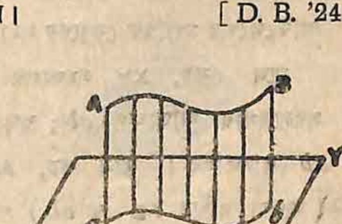
2. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব অঙ্কিত কর।

3. প্রমাণ কর যে, শূন্যস্থ সমান্তরাল সরলরেখাসমূহের উপর যে-কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বসমূহ একই সমতলে অবস্থিত এবং সেই সমতলটি সমান্তরাল সরলরেখাসমূহের উপর লম্ব। [C. U. '26]

4. একটি প্রদত্ত সরলরেখাগামী যে-কোন সমতলের উপর একটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [D. B. '24]

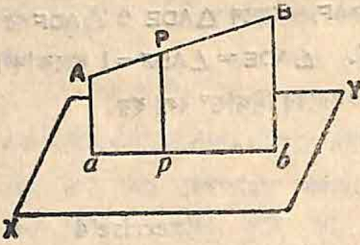
সংজ্ঞা ঃ কোন রেখার উপরিস্থিত বিন্দুগুলি হইতে কোন সমতলের উপর লম্ব আঁকিলে, পাদবিন্দুর সঞ্চারপথকে ঐ সমতলের উপর সেই রেখার অভিক্ষেপ (Projection) বলে।

ab রেখাটি XY সমতলের উপরে AB রেখার লম্ব অভিক্ষেপ।



চিত্র নং 56

সমতলের উপরে সরলরেখার অভিক্ষেপ সরলরেখা হয়।



চিত্র নং 57

মনে কর, AB একটি সরলরেখা এবং XY একটি সমতল। AB-র উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। XY সমতলের উপর Pp লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, p বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা।

XY-এর উপর Aa এবং Bb লম্ব টান।

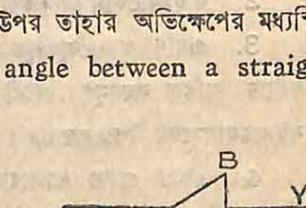
প্রমাণ : ∵ Aa, Bb, Pp প্রত্যেকে XY সমতলের উপর লম্ব, ∴ ইহারা সমান্তরাল। আবার, যেহেতু ইহারা একটি সরলরেখা AB-র সহিত মিলিত হইয়াছে, অতএব ইহারা সামতলিক। ইহাদের সমতল Ab, XY-সমতলের সহিত একটি সরলরেখায় ছেদ করে এবং ab সেই সরলরেখা। অতএব p বিন্দু এই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

সুতরাং p বিন্দুর সঞ্চারপথ ab সরলরেখা।

অতএব, সমতলের উপরে কোন সরলরেখার অভিক্ষেপ সরলরেখা হয়।

সংজ্ঞা : সরলরেখার ও কোন সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপের মধ্যস্থিত কোণকে ঐ সমতলের উপর সরলরেখাটির **নতি** (angle between a straight line and a plane) বলে।

সমতলের উপর কোন সরলরেখার নতি, ঐ সরলরেখা এবং সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপের মধ্যস্থিত কোণের সমান।



চিত্র নং 58

মনে কর, XY সমতলের উপর AB সরলরেখার অভিক্ষেপ ab ; সুতরাং AB ও ab সামতলিক। মনে কর, AB ও ab (অথবা বর্ধিত AB ও ab) পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব, XY-এর উপর AB-র নতি BOb কোণের সমান।

এই নতিকে সরলরেখা ও সমতলের মধ্যবর্তী কোণ বলে। এখানে BOb কোণই AB সরলরেখা ও XY সমতলের মধ্যবর্তী কোণ।

Exercise 5

1. প্রমাণ কর যে কোন সরলরেখার অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য = সরলরেখাটির দৈর্ঘ্য × উহাদের অন্তর্ভূত কোণের কোসাইন।

2. কোন সমতলের বহিঃস্থ কোন সরলরেখা যদি সমতলস্থ কোন সরলরেখার সমান্তরাল হয়, তবে উহা সমতলেরও সমান্তরাল হইবে। [C. U. '31, '33]

3. কোন সমতলের উপর সমান ও সমান্তরাল সরলরেখাগুলির অভিক্ষেপগুলিও সমান ও সমান্তরাল হয়। [C. U. '23]

4. যদি একটি সরলরেখা কোন সমতলের সমান্তরাল হয়, তবে সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপেরও সমান্তরাল হইবে। [C. U. '44]

5. কোন সরলরেখার মধ্যবিন্দুর অভিক্ষেপ (কোন সমতলের উপর) ঐ রেখার অভিক্ষেপের মধ্যবিন্দু হইবে। [C. U. '16]

6. কোন সরলরেখা একটি সমতলের উপর তাহার অভিক্ষেপের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা সমতলস্থ যে-কোন অন্য সরলরেখার সহিত উৎপন্ন কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [C. U. '30, '31]

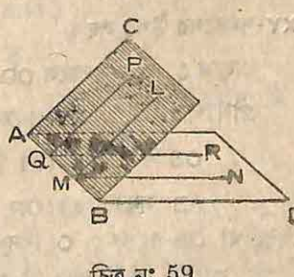
7. AB সরলরেখা দুইটি ছেদী সমতলের উভয়েরই সমান্তরাল; প্রমাণ কর যে, AB উহাদের ছেদরেখার সমান্তরাল। [C. U. '17, '33]

8. প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্য দিয়া যথাক্রমে অঙ্কিত দুইটি সমতলের ছেদরেখা প্রদত্ত উভয় সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা হইবে। [C. U. '35]

দ্বিতল কোণ (Dihedral angle)

দুইটি সমতল ছেদরেখায় মিলিত হইয়া দ্বিতল কোণ উৎপন্ন করে। ঐ দ্বিতল কোণই সমতল দুইটির মধ্যস্থিত কোণ।

ছেদরেখার যে-কোন বিন্দু হইতে দুইটি সমতলের উপর যথাক্রমে এমন দুইটি সরলরেখা আঁকা হইল যেন এই দুই রেখা, ছেদরেখার উপর লম্ব হয়। এই দুই রেখার মধ্যস্থিত কোণকে দ্বিতল কোণ বলে।



চিত্র নং 59

মনে করা যাক, BC এবং AD সমতল দুইটি AB রেখায় ছেদ করিয়াছে। AB রেখার যে-কোন বিন্দু Q হইতে যথাক্রমে BC এবং AD সমতলের উপর QP এবং QR সরলরেখা এমনভাবে আঁকা হইল যেন ইহারা AB-র উপর লম্ব।

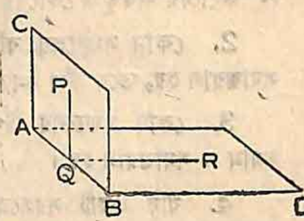
অতএব, ∠PQR=সমতল দুইটির মধ্যস্থিত দ্বিতল কোণ। AB রেখার অন্য যে কোন বিন্দু M হইতে ML এবং MN সরলরেখাদ্বয় AB-র উপর লম্ব করিয়া BC এবং AD সমতলের উপর আঁকা হইল।

∴ ∠LMN=ঐ তলদ্বয়ের মধ্যে দ্বিতল কোণ।

যেহেতু PQ ∥ LM এবং QR ∥ MN,

∴ ∠PQR=∠LMN.

সংজ্ঞা : দুইটি সমতলের মধ্যস্থিত দ্বিতল কোণ সমকোণ হইলে সমতল দুইটিকে পরস্পরের উপর লম্ব বলে। [চিত্র নং 60]



চিত্র নং 60

Exercise 6

1. যদি কোন সরলরেখা কতিপয় সমান্তরাল সমতলকে ছেদ করে, তবে প্রত্যেক সমতলের সহিত তাহার নতি সমান হইবে।

2. প্রমাণ কর যে, দুইটি ছেদী সমতলের মধ্যস্থিত দ্বিতল কোণ তাহাদের লম্বের মধ্যস্থিত সামতলিক কোণের সমান বা সম্পূরক হয়। [C. U. '10]

3. প্রমাণ কর যে, একটি সমতল দুইটি সমান্তরাল সমতলকে ছেদ করিলে অনুরূপ দ্বিতল কোণ দুইটি সমান হইবে। [C. U. '37]

4. প্রমাণ কর যে, একটি নির্দিষ্ট সমতলের উপর লম্ব এবং ঐ সমতলের বহিঃস্থ একটি সরলরেখা ধারক একটি সমতল অঙ্কন করা যায়। [C. U. '17, '19, '30]

5. প্রমাণ কর যে, একটি সরলরেখা কোন প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব হইলে ঐ সরলরেখা ধারক যে-কোন সমতল ঐ প্রদত্ত সমতলের উপর লম্ব হইবে।

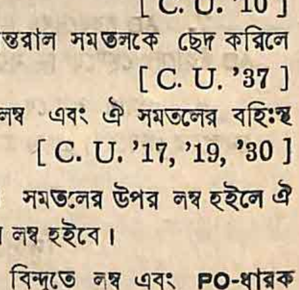
মনে কর, PO সরলরেখা XY-সমতলের উপর O বিন্দুতে লম্ব এবং PO-ধারক যে-কোন AB-সমতল XY-সমতলকে OB সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB-সমতল XY-সমতলের উপর লম্ব।

অঙ্কন : XP-সমতলে OQ ⊥ OB আঁক।

প্রমাণ : ∵ XY-সমতলের উপরে PO লম্ব,

∴ OB ও OQ উভয়ের উপর PO লম্ব।



চিত্র নং 61

∴ AB সমতলস্থিত OP এবং XY-সমতলস্থিত OQ প্রত্যেকে উভয় সমতলের ছেদরেখা OB-র উপর O বিন্দুতে লম্ব। ∴ ∠POQ ঐ দুই সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণের পরিমাণ। ∵ POQ দ্বিতল কোণটি সমকোণ, ∴ AB সমতলটি XY-সমতলের উপর লম্ব।

উত্তরমালা

পরিমিতি

Exercise 1

1. 294 বর্গ ফু. 343 ঘনফু. ; 2. 54 বর্গ সে. মি. 27 ঘন সে. মি. 3. 2·5 সে.মি.
4. 6 একক 5. 236 ব.ফু. 6. 2 ফু. 8 ই. 7. 20 সে.মি., 15 সে. মি., 10 সে.মি.
8. 3 ফু. 9 ই. 9. 8 ইঞ্চি 10. 11 ফু. 11. 7 আ. $2\frac{3}{4}$ পা.
12. 4 ফু. 6 ই. 13. 42·42 ফুট (প্রায়)।

Exercise 2

1. 108 বর্গ সে. মি. 2. 4200 ঘন সে.মি. 4. 96 ঘনইঞ্চি, 128 ব. ই.
5. 11 ফু. 390 ব. ফু. 6. 9 সে. মি. 7. 800 ঘন সে. মি. 8. 370·764 ব. ফু.
9. 810 ঘনফুট 11. 240 ঘন সে. মি. 12. 544 বর্গ সে. মি., 1280 ঘন সে. মি. 13. 600 ঘনফুট 14. $180\sqrt{3}$ ঘন সে. মি.
15. 4 পা. 10 শি. 16. 1 বর্গ ফু. 17. 420 ঘন ফু. 18. $16\sqrt{3}$ বর্গ ফু., $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ ঘ. ফু. 19. 360 ঘ. সে. মি., 432 বর্গ সে. মি. 20. 12 সে. মি.।

Exercise 3

1. 220 ব. মি. 2. 165 ব. ফু. 3 $113\frac{1}{7}$ ঘন ফু., $75\frac{3}{7}$ বর্গ ফু.
4 1232 ব. ডেসি মি. 5. 341 ব. সে. মি. 6. 3 মি. 7. 27 টা. 50 প.
8. $1\frac{3}{4}$ মি. 9. 396 ঘ. মি. 10. 7 মি. 11. 440 টা. 12. ·006 ই.
13. 462 ব. সে. মি. 14. $339\frac{3}{7}$ পা. 15. $\frac{1}{4}$ সে. মি. 16. $1018\frac{2}{7}$ ঘ. ই.।

Exercise 4

1. (i) 17 ই. (ii) $427\frac{3}{7}$ ব. ই. (iii) $628\frac{4}{7}$ ব. ই. (iv) $1005\frac{5}{7}$ ঘ. ই.,
2. 16 ই., $2\sqrt{15}$ ই. 3. 1 ফু. 4. 24·6 ই. (আসন্ন) 5. $314\frac{2}{7}$ ঘ.সে.মি. $204\frac{2}{7}$ ব. সে. মি. 6. 4 ফু. 7. 209·5 বর্গগজ (প্রায়) 8. 770 ঘ. সে. মি.
9. $427\frac{3}{7}$ বর্গ সে. মি., $1005\frac{5}{7}$ ঘন সে. মি. 10. $47\frac{1}{7}$ ব. ফু., $37\frac{5}{7}$ ঘন ফু.
11. 1930·971 ঘ. ই. (প্রায়) 12. $293\frac{1}{3}$ ঘন ফু. 13. $339\frac{3}{7}$ ঘ. ই.
14. $18\frac{3}{4}$ ফু. 19·4 ফু. (প্রায়), 10·09 ফু. (প্রায়)।

Exercise 5

1. 98 বর্গ ডেসি মি. 56 বর্গ সে. মি. 2. 154 বর্গ ডেসি. মি.
3. $1437\frac{1}{3}$ ঘন সে. মি. 4. $3\frac{1}{2}$ সে. মি. 5. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ মি. 6. 7 মি.
7. $14\frac{1}{7}$ ঘ. ফু. 8. 3 মি. 9. 216 10. 840 11. 6 মিলি মি.
12. 1299·87 ঘ. ই. 13. 4 সে. মি. 14. 2 ই. 16. $4\frac{1}{2}$ ই.
17. 201 পা. $13\frac{3}{5}$ আউন্স 18. 12 ইঞ্চি 19. 4
20. 20 মিনিট 21. তলগুলির অনুপাত $\sqrt{2}+1 : 3 : 4$.

বীজগণিত

Exercise 1

1. $a-3b=0$ 2. $mn=10$ 3. $ab'-a'b=0$ 4. $a^6-a^3=1$

5. $(ab+d)^2=(a^2-b+c)(b^2-bc+ad)$ 6. $ab=1$

7. $c^2-bc+ab^2=0$ 8. $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}=4$ 9. $ab=6$

10. $a^2+2c-b=0$ 11. $(a+b)^{\frac{2}{3}}+(a-b)^{\frac{2}{3}}=2$

12. $p^3-3pq+2r=0$ 13. $m^3-3lm-n=0$

14. $a^4-2a^2b^2-b^4+2c^4=0$

15. $a(b_1c_2-b_2c_1)+b(c_1a_2-c_2a_1)+c(a_1b_2-a_2b_1)=0$

16. $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ 17. $b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4=a^2b^2c^2d^2$

18. $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=2$ 19. $x^2+y^2=a^2.$

Exercise 2

1. 34 2. 1 3. 3 4. $a, a+d, a+2d, \cdots\cdots$

5. $5, 2, -1, -4, \cdots$ 6. -26 7. $35, 3r-1$

8. $-30, 10-2n$ 9. $3\frac{1}{2}$ 10. (i) $a-\dfrac{1}{n}+1$, (ii) $\dfrac{n^2-n+1}{n}$

11. নবম 12. ষষ্ঠ, 11-তম 13. না 14. 16-তম

15. 38 16. -49 17. 9, 0 18. $2, 5, 8\cdots$

19. $\dfrac{d(p-1)-c(q-1)}{p-q}$, $\dfrac{c-d}{p-q}$ 20. 0 21. $\dfrac{r(a-b)-(aq-bp)}{p-q}$

23. 16, 14, 12,... 24. $m+n-p.$

Exercise 3

1. 15 2. 4 3. -9 4. x^2+a^2 5. $2\frac{7}{8}$

6. $\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ 7. 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36

8. 68, 132, 196, 260 9. 6 10. 7.

Exercise 4

1. 100 2. $\dfrac{n}{2}(3n+7)$ 3. -96 4. 290 5. $61\frac{3}{4}$

6. $\dfrac{n+1}{2}$ 7. 378 8. $(n-1)(2n-3)$ 9. $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$

10. $19(\sqrt{2}+18)$ 11. 3927 12. -144 13. 900

14. 19096 15. 4080 16. $n(2n+1)$ 17. 247

18. $\frac{1}{2}n(n+1)$ 19. 6867 20. 7500 21. 2940 22. 861

23. -368 24. 1763 25. 11 26. 19 27. 551
28. 1, 2 29. 5, 9, 13,.... 35. 3, 10 অথবা $-1, 12$
31. $(2r-1)^2$ 32. 2747 35. n^2 36. $\frac{n}{2}(a+c)$ 38. 25
39. 9 বা 16 40. 50500 গজ 41. 9 দিন 42. 36 ব. পরে, $18\frac{1}{2}$ গজ
43. 10 মা. 44. $2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$ অথবা $8\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$
45. 16549 46. 399 47. 3 49. 4 বা 7 50. 9 দিন।

Exercise 5

1. $\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$ 2. $\frac{n}{2}(4n^2+17n+21)$
3. $\frac{n}{2}(6n^2+21n+23)$ 4. $\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$
5. $\frac{n}{3}(n^2+6n+11)$ 6. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
7. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 8. $\frac{1}{4}n(n+5)(n^2+5n+10)$
9. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+2)$ 10. $\frac{n}{2n+1}$ 11. $\frac{n}{3(n+3)}$
12. $\frac{1}{2}(4n^3+18n^2-n)$ 13. $3n(n+1)(n+3)$ 14. $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$
15. (i) $\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$ (ii) $n^2(2n^2-1)$
(iii) $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ 16. (i) $\frac{1}{3}n(n^2+3n+5)$;
(ii) $\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n+2)$ 17. $-2n$ 18. $p+1$
19. $\frac{-r(r+1)}{2}$ (যদি r যুগ্ম হয়), অথবা $\frac{r(r+1)}{2}$ (যদি r অযুগ্ম হয়)
20. 26876100 28. 20,24,28 29. 2, 3, 4, 5, 6.

Exercise 6

1. 128 2. 6561 3. $\frac{1024}{3125}$ 4. $\frac{1}{3^{n-1}}$ 5. $\frac{1}{2^{n-1}}$
6. $3(-3)^{p-1}$ 7. $\frac{1}{81}$ 8. $\frac{1}{32}$ 9. 1, 2, 4, 8,....
10. $\frac{1}{256}$ 11. $\frac{1}{6561}$ 12. 3, 2 13. নবম 14. সপ্তম পদ
15. 512, 2^{n-1} 16. $\left(\frac{a^{n-q}}{b^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ 17. $\left(c^{1-q}.d^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

18. $\sqrt{mn}$, $m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{2q}}$.

Exercise 7

1. ± 25 2. $\pm\frac{1}{4}$ 3. ± 9 4. ± 4 5. $\pm x^2y^2$; ± 9
6. 12, 36, 108 ; অথবা $-12, 36, -108$ 7. 15, 45
8. 225, 2025, 18225 ; অথবা $-225, 2025, -18225$
9. (i) $\frac{1}{3}, 1, 3$ অথবা $-\frac{1}{3}, 1, -3$; (ii) $-9, 27$
10. $\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}$; অথবা $-\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, -\frac{3}{2}, 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{32}{243}$
16. 32, 18 ; অথবা 18, 32.

Exercise 8

1. 225 2. $255\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}(3^n-1)$ 4. $\frac{1}{4}(1-3^{2n})$

5. $3\frac{63}{64}$ 6. $\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ 7. $\frac{19682}{3-\sqrt{3}}$ 8. $1\frac{511}{512}$

9. $\frac{5}{9}\left(1-\frac{1}{10^{n-1}}\right)$ 10. $\frac{1}{6}-\frac{2}{3.10^n}$ 11. -255 12. $1\frac{255}{256}$

13. $\frac{2}{3}\{1-(-\frac{1}{2})^n\}$ 14. $-\frac{(a+b)^2}{2b(a-b)}\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^r-1\right\}$

15. $\frac{63}{2}(2+\sqrt{2})$ 16. $\frac{1}{3}(1-2^{2p})$ 17. 1524

18. $\frac{31}{16}(\sqrt{2}+1)$ 19. $7\frac{127}{128}$ 20. $2^{n+1}-2$ 21. $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

22. 1530   23. 582   24. 10টি   25. 8টি   26. 6টি

27. $21\frac{63}{64}$ 28. 4921   29. $3\frac{63}{64}, \frac{85}{64}$ 30. 1092

31. $\frac{5}{2}(2^{25}-1)$ 32. 6318   33. 25500.

Exercise 9

1. $\frac{70}{81}(10^n-1)-\frac{7n}{9}$ 2. $\frac{20}{81}(10^n-1)-\frac{2n}{9}$

3. $\frac{2n}{9}-\frac{2}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ 4. $n.2^n$ 5. $\frac{n}{2}.3^n+\frac{1}{4}(3^n-1)$

6. $2^{n+1}-n-2$ 7. $\frac{3}{4}(3^n-1)-\frac{n}{2}$ 8. $\frac{3^{n+1}-3-2n}{4.3^{n-1}}$

15. $2^{n+1}-2+n(n+1)$ 17. 2, 4, 8   18. 1, 4, 16

19. 3, 6, 12 ; অথবা 12, 6, 3   20. 2, 5, 8 ; অথবা 26, 5, -16

21. $\frac{y^2-xz}{x+z-2y}$ 22. 4, 8, 16 অথবা 16, 8, 4

26. $n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ 27. $2n-2+\frac{1}{2^{n-1}}$ 29. $2^{n+1}-n-2$.

Exercise 10

1. $\left.\begin{matrix}x=5\\y=7\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=7\\y=5\end{matrix}\right\}$ 2. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=5\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=5\\y=2\end{matrix}\right\}$

3. $\left.\begin{matrix}x=4\\y=2\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=-1\\y=-3\end{matrix}\right\}$ 4. $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=\frac{5}{2}\\y=-\frac{5}{3}\end{matrix}\right\}$

5. $\left.\begin{matrix}x=1\\y=9\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=9\\y=1\end{matrix}\right\}$

6. $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{5}(1+2\sqrt{5a-1})\\y=\frac{1}{5}(2-\sqrt{5a-1})\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{5}(1-2\sqrt{5a-1})\\y=\frac{1}{5}(2+\sqrt{5a-1})\end{matrix}\right\}$

7. $\left.\begin{matrix}x=b+\sqrt{(a+b)^2-c^2}\\y=a-\sqrt{(a+b)^2-c^2}\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=b-\sqrt{(a+b)^2-c^2}\\y=a+\sqrt{(a+b)^2-c^2}\end{matrix}\right\}$

8. $\left.\begin{matrix}x=3\\y=6\end{matrix}\right\}$ বা $\left.\begin{matrix}x=6\\y=3\end{matrix}\right\}$ 9. $x=2, y=1$; বা $x=1; y=2$

10. $x=3, y=2$; বা $x=-\frac{4}{3}, y=-\frac{9}{2}$

11. $x=\frac{1}{4}, y=4$; বা $x=\frac{3}{4}, y=12$

12. $x=1, y=3$; বা $x=3, y=1$

13. $x=5, y=7$; বা $x=\frac{11}{9}, y=-\frac{13}{3}$

14. $\left.\begin{array}{l}x=5\\y=4\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=5\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-4\\y=-5\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-5\\y=-4\end{array}\right\}$

15. $x=3, y=6$; বা $x=6, y=3$

16. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\\y=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\\y=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=\pm 2\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=\pm\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\y=-\frac{2}{3}\end{array}\right\}$

19. $x=\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}$

20. $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=3\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{7}{2}\\y=-\frac{9}{2}\end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=1\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{5}\\y=5\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=\frac{4}{5}\\y=20\end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{20}{13}\\y=\frac{37}{13}\end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{l}x=8\\y=4\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=8\end{array}\right\}$

25. $\left.\begin{array}{l}x=7\\y=5\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-7\\y=-5\end{array}\right\}$

26. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\y=1\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=-\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

27. $\left.\begin{array}{l}x=9\\y=4\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=9\end{array}\right\}$

28. $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=2a\\y=2b\end{array}\right\}$

29. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=1\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{4}\end{array}\right\}$

30. $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=-3\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=1\end{array}\right\}$.

লগারিদ্‌ম্

Exercise 11

1. (i) ·9031 (ii) 1·9445 (iii) 2·7505 (iv) $\bar{2}$·5441 (v) $\bar{1}$·0913 (vi) $\bar{3}$·5127 **2.** (i) 1·329 (ii) 23·01 (iii) 473·0 (iv) ·1763 (v) ·05671 (vi) ·06689 (vii) ·009432 **3.** (i) 6 (ii) 10 **7.** (i) ·5776 (ii) 1·249 (iii) 343·4 (iv) ·01840 **8.** ·69897 **9.** ·30103 **11.** ·3890 (প্রায়)

12. ·7656, ·0007021 **13.** 486 পা. 12 শি. (প্রায়).

14. log 3 **15.** 375 টাকা **16.** 3993

17. 100 বা $\frac{1}{100}$ **18.** 6215 মা. **19.** 275 **20.** 22 গজ

21. 4, $-\frac{4}{5}$ **24.** 1·77 (প্রায়) **25.** 1·593

26. $x=$·40703, $y=5$·6568 (প্রায়) **27.** 1·206 **28.** ·03

29. $\log x=a, \log y=b$ **30.** $\log x=\frac{1}{5}(a+3b), \log y=\frac{1}{5}(a-2b)$

31. 3 **32.** 12·5.

School Final Examination—1967

ADDITIONAL MATHEMATICS

1. Answer *either* (*a*) and (*b*), *or* (*c*) and (*d*) :—

(*a*) Factorise : $x^4+4x^3+5x^2+8x+6.$

[Ans. $(x+1)(x+3)(x^2+2)$]

(*b*) If $x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$, show that $2x^3+6x=3.$

(*c*) If n be a positive integer, show that the last digit of $3^{2n+1}+2^{2n+1}$ is 5.

(*d*) Find the value of x which satisfies the equation

$(\sqrt{6})^{2x+2}=216,$ [Ans. $x=2$]

2. Answer any *two* of the following questions :

(*a*) Solve : $x(y+z)=5,\ y(z+x)=8,\ z(x+y)=9.$

[Ans. $x=1, y=2, z=3$; or, $x=-1, y=-2, z=-3$]

(*a*) If $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, find the value of

$$\frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}$$ [Ans. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$]

(*c*) Solve : $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2},\ x+y=10.$

[Ans. $x=2, y=8$, or, $x=8, y=2$]

3. Answer *either* (*a*) and (*b*), *or* (*c*) and (*d*) :—

(*a*) Find the sum of the first n natural numbers.

[Ans. $\dfrac{n(n+1)}{2}$]

(*b*) Eliminate x from the equations

$x+\dfrac{a}{x}=b$ and $x-\dfrac{a}{x}=c$ [Ans. $b^2-c^2=4a$]

(*c*) If $\log_{10}2=\cdot3010$ and $\log_{10}7=\cdot8451$, find the value of

$\log_{10}\left(\dfrac{49}{8}\right)^{\frac{1}{2}}.$ [Ans. $\cdot3936$]

(*d*) The 12th term of an A. P. is 23 and the sum of the first 22 terms is 484 ; find the sum of first 30 terms. [Ans. 900]

4. Solve graphically : $x+y=0$ and $y^2+x=0.$

[Ans. $x=0, y=0$; or, $x=-1, y=1$]

Or, A number consists of two digits, the sum of the two digits being 11. If 9 be added to the number, the digits are inverted. Find the number. [Ans. 56]

5. Answer (*a*) and any *two* of the rest :

(*a*) From the top of a vertical tree 30 ft. high the angles of elevation and depression of the top and the bottom of a vertical post standing on the horizontal plane through the foot of the tree are observed to be 30° and 45° respectively. Find the height of the post.

[Ans. 47·32 ft.]

(*b*) The angles of a triangle are in the ratio 5 : 7 : 8. Express them in degrees and radians.

$$\left[\text{Ans. } 45°,\ 63°,\ 72°\ ;\ \frac{\pi^c}{5},\ \frac{7\pi^c}{20},\ \frac{2\pi^c}{5}\right]$$

(*c*) If θ be a positive acute angle and $7\sin^2\theta+4\cos^2\theta=5$, prove that $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(*d*) Show that $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$.

6. Answer *either* (*a*) and (*b*), *or* (*c*) and (*d*) :

(a) If two triangles are equiangular, show that their corresponding sides are proportional.

(*b*) If through any point P within a circle two chords AB and CD are drawn and AC, BD are joined, prove that

AP. BP.=CP. DP.

(*c*) If two triangles have two sides of the one proportional to two sides of the other and the angles contained by those two sides are equal, prove that the triangles are similar.

(*d*) Two circles touch each other internally at A and chords APQ, AMN and drown to cut them. Show that PM and QN are parallel.

7. (a) Draw a direct common tangent to two given unequal circles which intersect each other and justify your construction.

(*b*) Draw an equilateral triangle touching a circle of radius equal to 3 cm. at three points and justify your construction.

8. Answer (*a*) and any *one* of (*b*) and (*c*) :

(*a*) If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is also perpendicular to the plane in which they lie. Prove this.

(*b*) From O, the centre of a circle, a perpendicular OP is drawn to the plane. Show that all points on the circumference are equidistant from P.

(*c*) Find the height of the pyramid of volume 800 c.c. standing on a rectangular base of sides 15 cm. and 10 cm. [Ans. 16 cm.]

School Final Examination—1968

ADDITIONAL MATHEMATICS

1. (*a*) এবং (*b*), অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) যদি x^2+ax+b এবং x^2+mx+n রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $x+p$ হয় ; তবে দেখাও যে $p=\dfrac{b-n}{a-m}$.

(*b*) নিম্নলিখিত রাশির উৎপাদক নির্ণয় কর :

$8a^3+8a-5.$ [Ans. $(2a-1)(4a^2+2a+5)$]

(*c*) যদি $a=x^{q+r}.\, y^p.\ b=x^{r+p},\, y^q.$ এবং $c=x^{p+q},\, y^r.$

প্রমাণ কর যে $a^q b^r c^p = a^r b^p c^q.$

(*d*) সমাধান কর : $3^{2x+1}-10.3^x+3=0.$ [Ans. $x=1, -1$]

2. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(*a*) lx^2+mx+n রাশিটির পূর্ণবর্গ হইবার শর্ত নির্ণয় কর।

[Ans. $m^2=4ln$]

(*b*) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে t অপনয়ন কর :

$v=u+ft,\ s=ut+\frac{1}{2}ft^2.$ [Ans. $v^2-u^2=2fs$]

(*c*) সমাধান কর : $x+y=\dfrac{5}{6},\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1.$

[Ans. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$; or, $x=\frac{5}{2}, y=-\frac{5}{3}$]

3. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(*a*) নিম্নের সমীকরণ হইতে x-এর মান নির্ণয় কর :

$a^x.\, c^{-2x}=b^{3x+1}.$ $\left[\text{Ans.}\quad x=\dfrac{\log b}{\log \dfrac{a}{b^3 c^2}}\right]$

(*b*) a একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ এবং l, n-তম পদ। P ইহার প্রথম n পদের গুণফল হইলে প্রমাণ কর যে, $P=(al)^{\frac{n}{2}}$.

(*c*) নিম্নের শ্রেণীটির n-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর :

$9+99+999+9999+\cdots$ [Ans. $\frac{10}{9}(10^n-1)-n$]

4. নিম্নের সমীকরণদ্বয়ের লেখ অঙ্কিত কর :

$y=x^2$ এবং $x-y+6=0$ এবং তাহা হইতে $x^2-x-6=0$ সমীকরণটির সমাধান কর।

[Ans. $x=3, -2$]

অথবা, একটি আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের গুণফল 260 sq. cms. বৃহত্তর বাহু হইতে 5 cms. বাদ দিলে এবং ক্ষুদ্রতর বাহুর সহিত 2 cms. যোগ দিলে ক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র হয়। আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা নির্ণয় কর।

[Ans. 66 cms.]

5. (*a*) এবং (*b*), (*c*), (*d*) এর যে কোন **দুইটি** উত্তর কর :

(*a*) একটি সরল পথের ঠিক উপরে অবস্থিত একটি বিমানপোত হইতে ঐ পথের উপর অবস্থিত এক কিলোমিটার ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি প্রস্তরখণ্ডের অবনতি কোণ 45° ও 30°। পথ হইতে ঐ বিমানপোতের উচ্চতা নির্ণয় কর।

[Ans. 1·37 km., or, ·37 km.]

(*b*) ঘড়ির বড় কাঁটাটি 12 cm. 5mm. দীর্ঘ। 20 মিনিটে কাঁটাটির শীর্ষ কত cm. যাইবে ? ($\pi=3{\cdot}1416$). [Ans. 26·18 cms.]

(*c*) যদি $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$ হয়, তবে θ-এর মান নির্ণয় কর। $(0°<\theta<180°)$ [Ans. 60°]

(*d*) যদি $3\tan\theta=2$ হয়, তবে নিম্নের রাশিটির মান নির্ণয় কর।

$$\frac{5\sin\theta-2\cos\theta}{\sin\theta+4\cos\theta}.$$ [Ans. $\frac{2}{7}$]

6. (*a*) এবং (*b*) **অথবা** (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত, উহাদিগের যে কোন অনুরূপ বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

(*b*) ABC একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ। A বিন্দুর স্পর্শক BC-এর বর্ধিতাংশের সহিত Q বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ কর যে,

$$BQ : CQ = AB^2 : AC^2.$$

(*c*) কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা ঐ বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, অন্যটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

(*d*) PQকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। PR এবং QS জ্যাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে

$$PQ^2 = PR.PO + QS.QO.$$

7. (*a*) কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশকোণী করিয়া একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত কর।

(*b*) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপে বহির্বিখণ্ডিত কর যে ঐ অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়। (প্রমাণ প্রয়োজন)।

8. (*a*) এবং (*b*), (*c*)এর যে কোন **একটি** উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপরিস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে ঐ সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অঙ্কিত সরলরেখাসমূহ একতলীয়।

(*b*) প্রমাণ কর যে একটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে একটি সমান্তরাল সরলরেখাশ্রেণীর উপর যে সকল লম্ব টানা যায় তাহারা একতলীয় হইবে।

(c) ত্রিভুজ-তলবিশিষ্ট একটি সমকোণী প্রিজ্‌মের ঘনফল 330 c.c. ; ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 cms., 12 cms. এবং 13 cms ত্রিভুজের উচ্চতা এবং তল-সমষ্টি নির্ণয় কর। [উঃ উচ্চতা = 11 cms. তল-সমষ্টি = 390 sq. cms.]

School Final Regular (1969)

ADDITIONAL MATHEMATICS

1. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(*a*) নিম্নলিখিত রাশির উৎপাদক নির্ণয় কর :

$2x^3-4x^2-8x+16.$ [Ans. $2(x-2)^2(x+2)$]

(*b*) যদি $a^x=b^y=c^z$ এবং $b^2=ac$ হয়, প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}.$$

(c) সমাধান কর : $\dfrac{6x-2}{\sqrt{3x}-1}-4=\dfrac{\sqrt{3x}+1}{2}.$ [Ans. $x=\frac{25}{27}$]

2. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(*a*) সমাধান কর : $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18$ [Ans. $x=8, y=4$ বা, $x=4, y=8$]

$x+y=12$

(*b*) *a* এবং *b*-এর মান কত হইলে $x^3+ax^2+bx-15$, $x^2+2x-15$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

[Ans. $a=3, b=-13$]

(*c*) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে *x*, *y* অপনয়ন কর :

$px+qy=0$ এবং $ax^2+bxy+cy^2=0.$

[Ans. $aq^2-bpq+cp^2=0$]

3. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(*a*) একটি সমান্তর শ্রেণীর তিনটি পদের যোগফল 27 এবং তাহাদের গুণফল 504 ; পদ তিনটি নির্ণয় কর। [Ans. 4, 9, 14 ; বা, 14, 9, 4]

(*b*) $3\frac{5}{9}$ এবং $40\frac{1}{2}$ সংখ্যা দুইটির মধ্যে পাঁচটি গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

[Ans. $5\frac{1}{3}$, 8, 12, 18, 27 ; বা, $-5\frac{1}{3}$, 8, -12, 18, -27]

(c) যদি $a^{3-x}.b^{5x}=a^{x+5}.b^{3x}$,

দেখাও যে, $x \log \left(\frac{b}{a}\right)=\log a$.

4. $y=4x^2-3x+2$ সমীকরণটির (যাহাতে $0<x<1$) লেখ অঙ্কিত কর এবং তাহা হইতে y-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

অথবা, একটি অঙ্কদ্বয়দ্বারা গঠিত দুইটি সংখ্যার অনুপাত 4 : 7 হইলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। এইরূপ কয়টি সংখ্যা সম্ভব ?

[উত্তর : ঐরূপ 4 জোড়া সংখ্যা হইতে পারে। যথা : 12 ও 21, 24 ও 42, 36 ও 63 এবং 48 ও 84]

5. (a) এবং অপর যে কোন একটির উত্তর কর :

(a) দুইটি স্তম্ভের সমতলীয় দূরত্ব 60 ফুট। দ্বিতীয় স্তম্ভের শীর্ষ হইতে প্রথম স্তম্ভের শীর্ষের কৌণিক অবনতি 30°, দ্বিতীয় স্তম্ভটির উচ্চতা 200 ফুট হইলে প্রথমটির উচ্চতা নির্ণয় কর। [Ans. 165·36 ফু.]

(b) যদি $2 \sin^2\theta=3 \cos\theta$, এবং θ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে 'θ'-র মান নির্ণয় কর। [Ans. $\theta=60°$]

(c) প্রমাণ কর যে, $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$.

6. (a) এবং (b) অথবা (c) এবং (d)এর উত্তর কর :

(a) যদি দুইটি ত্রিভুজের একের একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান হয় এবং উহাদের একটির ঐ কোণের ধারক বাহুদ্বয় যথাক্রমে অপর কোণটির ধারক বাহুদ্বয়ের সমানুপাতী হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে ঐ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।

(b) যদি একটি চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমানুপাতে বিভক্ত করে, তবে প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজটি একটি ট্রাপিজিয়াম।

(c) যে কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে উহার অতিভুজের উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করিলে প্রমাণ কর যে ঐ লম্বের উভয় পার্শ্বস্থ ত্রিভুজদ্বয়ের প্রত্যেকটি, মূল ত্রিভুজের সদৃশ হইবে এবং ঐ পার্শ্বস্থ ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সদৃশ হইবে।

(d) একটি সমকোণী ত্রিভুজে একটি বাহু অপরটির দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব অতিভুজকে 4 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

7. (a) কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম পঞ্চভুজ অন্তর্লিখিত কর।

(b) দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর।

8. (*a*) এবং যে কোন একটি উত্তর কর :—

(*a*) Same as—8 (*a*) of 1967.

10. *Or*, (*a*) যদি দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হয় এবং তাহাদের একটি যদি সমতলের উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে অপরটিও সমতলের উপর লম্ব হইবে।

(*b*) একই রেখায় অবস্থিত নহে এরূপ তিনটি বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত একটি বিন্দুর ত্রিমাত্রিক সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(*c*) 15 সে. মি. উচ্চতাসম্পন্ন একটি লম্ব পিরামিডের ভূমি একটি 16 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র। ঐ পিরামিডের ঘনফল ও পার্শ্বপৃষ্ঠসমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans. ঘনফল=1280 ঘন সে. মি., পার্শ্বতল=644 বর্গ সে. মি.]

School Final Examination, 1970

ADDITIONAL MATHEMATICS

1. Answer *either* (*a*) and (*b*), or (*c*) and (*d*) :—

(*a*) Solve : $5^{x-2}+5^{1-x}=1\frac{1}{5}$. [Ans. $x=1$ or 2]

(*b*) Resolve into factors : $5x^2-16x-8$.

[Ans. $(x-2)(5x^2+10x+4)$]

(*c*) If $a=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ and $b=\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$,

find the value of a^2+b^2+6ab. [Ans. 1]

(*d*) Find by the remainder theorem the last remainder independent of x when $8x^3+6x^2+3x+3$ is divided by $2x+1$.

[Ans. 2]

2. Answer any *two* :—

(*a*) If $x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$, prove that $3x^3+9x=8$.

(*b*) Eliminate x, y from the following equations :—

$ax+by+c=0,\ lx+my+n=0,\ px+qy+r=0.$

[Ans. $a(mr-nq)+b(np-lr)+c(lp+mp)=0.$]

(*c*) Find the value of k for which $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)+k$ will be a perfect square. [Ans. 1]

(*d*) Solve (for x and y) : $y^2=4ax$; $y=mx+c$.

$$\left[\text{Ans } x=\frac{2a-cm\pm2\sqrt{a^2-acm}}{m^2}, y=\frac{2a\pm2\sqrt{a^2-acm}}{m}\right]$$

3. Answer any *two* :—

(*a*) If the p^{th} and q^{th} terms of an A. P. are respectively q and p, find the first term and the common difference.

[Ans. First term $=p+q-1$, com. diff $=-1$]

(*b*) If x, y, z be in G. P., show that,

$$\frac{1}{x+y}, \frac{1}{2y}, \frac{1}{y+z} \text{ are in A. P.}$$

(*c*) Prove that, $\log 2+16\log\frac{16}{15}+12\log\frac{25}{24}+7\log\frac{81}{80}=1$.

4. Draw the graphs of the equations $y=x^2$ and $2y-5x+3=0$ and from the graph solve the equation $2x^2-5x+3=0$.

Or, The age of a man is three times the sum of the ages of his two sons and 5 years hence his age will be double the sum of their ages. Find his present age. [Ans. 45 yrs.]

5. Answer (*c*) and *any one* of (*a*) and (*b*) :—

(*a*) Find the value of :—

$\tan^2 30°+2\sin 60°+\tan 45°-\tan 60°+\cos^2 30°$. [Ans. $2\frac{1}{12}$]

(*b*) Solve : $2\cos^2\theta=3\sin\theta$ $(0°<\theta<180°)$. [Ans. $\theta=30°, 150°$]

(*c*) From the top of a tree the angle of depression of an object on the ground is 60°. The angle of depression becomes 30° at a point 20ft. below the top. Find the height of the tree. [Ans. 30 ft.]

6. Answer (*a*) and (*b*) *or* (*c*) and (*d*) :—

(*a*) If a straight line divides two sides of a triangle proportionally, show that it is parallel to the remaining side.

(*b*) Two straight lines AB and CD intersect at a point O such that OA : OB = OC : OD. If P and Q be the middle points of AB and CD respectively, show that PQ is parallel to AC and BD.

(*c*) Prove that the angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

(*d*) If a tangent be parallel to the chord of a circle, prove that the point of contact is the middle point of the arc of the corresponding chord.

7. (*a*) Draw a transverse common tangent to two unequal circles. (*b*) Circumscribe a square about a circle of radius 3 cm. (Construction as well as proof are needed in both the cases.)

8. Answer (*a*) and any *one* of the rest :—

(*a*) Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are coplanar.

(*b*) A right circular cone is made out with the material of the sphere of diameter 9 cm. Find the height of the cone if the diameter of the base be 18 cm. [Ans. $4\frac{1}{2}$ cm.]

(*c*) The thickness of an iron pipe of length 20 ft. and internal diameter 3 inches in $\frac{1}{2}$ in. If the weight of one cubic inch of iron be 4 oz., find the weight of the pipe. $(\pi=\frac{22}{7})$. [Ans. 330 lb.]

School Final Examination—1971

ADDITIONAL MATHEMATICS

1. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(*a*) নিম্নলিখিত রাশির উৎপাদকগুলি নির্ণয় কর :

$a^4-6a^3+7a^2+6a-8.$ [Ans. $(a+1)(a-1)(a-2)(a-4)$]

(*b*) সমাধান কর : $2^{x+5}=2^{x+2}+\frac{7}{4}.$ [Ans. $x=-4$]

(*c*) প্রমাণ কর যে, যদি n একটি ধন-যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হয় তাহা হইলে x^n-y^n, $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে। কিন্তু n ধন-অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হইলে x^n-y^n কখনই $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে না।

2. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(*a*) **Same as Q. 2(*c*) of S. F. 1967.**

(*b*) **Same as Q. 3(*b*) of S. F. 1967.**

(*c*) যদি $x=a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে

প্রমাণ কর যে, $a(bx^3-3bx-a)=b^2$.

3. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(*a*) 5টি সমান্তর সংখ্যার সমষ্টি 20 এবং তাহাদের বর্গগুলির সমষ্টি 90। ঐ সংখ্যা পাঁচটি নির্ণয় কর। [Ans. 2, 3, 4, 5, 6 ; অথবা 6, 5, 4, 3, 2]

(*b*) তিনটি গুণোত্তরীয় পদের সমষ্টি $24\frac{4}{5}$ এবং তাহাদের গুণফল 64। সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [Ans. $\frac{4}{5}$, 4, 20 ; অথবা, 20, 4, $\frac{4}{5}$]

(*c*) Log 2=0·3010, Log 3=0·4771 হইলে,

$\text{Log}\sqrt{54}+\log\sqrt[3]{243}$ রাশিটির মান নির্ণয় কর। [Ans. 1·6613]

4. $y=x^2$ এবং $y=4x-3$-এর লেখ আঁকিয়া তাহা হইতে $x^2-4x+3=0$ সমীকরণটির সমাধান কর।

অথবা, দশ বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিনগুণ ছিল। বর্তমানে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইলে দশ বৎসর পর পুত্রের বয়স কত হইবে নির্ণয় কর। [Ans. পিতার 50 ব.; পুত্রের 30 ব.]

5. (c) এবং যে কোন একটির উত্তর কর :—

(a) যদি $\tan A+\sec A=\frac{2}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে দেখাও $\sin A$ কত? [Ans. $\frac{1}{7}$]

(b) $2\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0$ হইলে,
θ-এর মান নির্ণয় কর। $(0<\theta<\pi)$. [Ans. $\theta=150°$]

(c) সূর্যের উন্নতিকোণ 30° হইতে 60°-তে পরিবর্তিত হওয়ায় একটি চিমনির ছায়ার দৈর্ঘ্য 50 ফুট কমিয়া গেল। চিমনির উচ্চতা কত? [Ans. $25\sqrt{3}$ ফুট]

6. (a) এবং যে কোন একটির উত্তর কর :—

(a) Same as Q. 8(a) or, of 1967.

(b) একটি ত্রিভুজ প্রিজমের ভূমির বাহুগুলি 17 সেন্টিমিটার, 25 সেন্টিমিটার ও 28 সেন্টিমিটার। উহার ঘনফল 4200 ঘন সেন্টিমিটার হইলে উহার উচ্চতা নির্ণয় কর। [Ans. 20 সে. মি.]

(c) একটি চোঙাকার স্তম্ভের ভূমির ব্যাস 7 ফুট এবং উচ্চতা 16 ফুট। প্রতি ঘনফুট 2 টাকা 25 পয়সা হিসাবে উহার নির্মাণ খরচ কত হইয়াছিল? $(\pi=\frac{22}{7})$
[Ans. 1386 টা.]

7. (a) এবং (b) অথবা (c) এবং (d)-এর উত্তর কর :—

(a) প্রমাণ কর যে, দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হইবে।

(b) প্রমাণ কর যে, দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের বর্গের অনুপাতের সমান।

(c) Same as Q. 6(c) of S. F. 1969.

(d) বৃত্তের দুইটি জ্যা AB এবং CD বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু O-তে পরস্পরকে ছেদ করে। যদি OB=OD হয়, প্রমাণ কর যে AB=CD।

8. (a) একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

(b) একটি 4 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। (উভয়ক্ষেত্রে অঙ্কন ও প্রমাণ দিতে হইবে।)

School Final Examination, 1972

ADDITIONAL MATHEMATICS

1. যে কোন দুইটির উত্তর কর :—

(a) $x=(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}$ হইলে $x^3+3bx-2a$-এর মান কত? [Ans. 0]

(b) সরল কর : $\left(a^{-3}\right)^2\times\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}\div\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-9}$. [Ans. a^{-3}]

(c) নিম্নলিখিত রাশির উৎপাদকগুলি নির্ণয় কর :—

$a^2-3bc+3b^2-4ab+ac.$ [Ans. $(a-3b)(a-b+c)$]

2. যে কোন দুইটির উত্তর কর :—

(a) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x অপনয়ন কর :

$px+q=0$ এবং $ax^2+bx+c=0.$ [Ans. $aq^2-bpq+p^2c=0$]

(b) প্রকৃত ভাগ না করিয়া—

$x^3+\left(p+q\right)^{x^2}-2(p+q)^2x+(p+q)^3$কে $x-p-q$ দ্বারা ভাগের x নিরপেক্ষ ভাগশেষটি নির্ণয় কর। [Ans. $(p+q)^3$]

(c) সমাধান কর : $3^{\ +1}+3^{x+2}=108.$ [Ans. $x=2$]

3. যে কোন দুইটির উত্তর কর :—

(a) a^2, b^2, c^2 সমান্তর শ্রেণীগঠন করিলে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b},$ রাশি তিনটি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

(b) $x+y=9, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ সমীকরণ দুইটি সমাধান কর।

[Ans. $x=b,\ y=3$, or, $x=3,\ y=6.$]

(c) $\log\ 2=\cdot3010300$, $\log\ 3=\cdot4771213$, $\log\ 7=\cdot8450980$ এবং $\log 2425805=6\cdot3848559$ হইলে $(84)^{\frac{1}{5}}$এর মান নির্ণয় কর।

[Ans. $2\cdot425805$]

4. $4x^2+9y^2=64$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কন কর।

অথবা, দুইটি অঙ্কের কোন সংখ্যার দশক অঙ্কটি, একক অঙ্কটির দ্বিগুণ। অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করিলে উৎপন্ন সংখ্যাটি, মূল সংখ্যাটি অপেক্ষা 27 কম হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [Ans. 63]

5. (*a*) এবং অপর যে কোন একটির উত্তর কর :—

(*a*) 120 ফুট দূরে অবস্থিত একটি অসম্পূর্ণ সৌধের শীর্ষের কৌণিক উন্নতি 30°। সৌধটির উচ্চতা কত বৃদ্ধি পাইলে একই স্থানে শীর্ষের কৌণিক উন্নতি 45° হইবে?

[Ans. 50·72 ফুট (আসন্ন)]

(*b*) মান নির্ণয় কর :

$\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \frac{3}{4}\sec^2 45^\circ - 4\sin^2 30^\circ$. [Ans. 0]

(*c*) প্রমাণ কর : $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

6. (*a*) এবং যে কোন একটির উত্তর কর :—

(*a*) Same as Q. 8(*a*) of S. F. 1968.

(*b*) প্রমাণ কর যে তিনটির অধিক সরল রেখা পরস্পরের উপর একই বিন্দুতে লম্ব হইতে পারে না।

(*c*) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 15 সেন্টিমিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 8 সেন্টিমিটার। উহার বক্রতল পরিমাণ ও ঘনফল নির্ণয় কর। [$\pi = \frac{22}{7}$].

[Ans. বক্রতল $= 427\frac{3}{7}$ ঘন সে. মি. ; ঘনফল $= 1005\frac{5}{7}$ ঘন সে. মি.]

7. (*a*) এবং (*b*) অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :—

(*a*) প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের যে কোন একটি বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা উহার অবশিষ্ট বাহুদ্বয়কে একই অনুপাতে বিভক্ত করে।

(*b*) ABC ত্রিভুজে D, AB বাহুর মধ্যবিন্দু। E বিন্দুতে CD দ্বিখণ্ডিত হইল। যদি AE বর্ধিত হইয়া BC বাহুর সহিত G বিন্দুতে মিলিত হয়, প্রমাণ কর যে $GC = \frac{1}{3}BC$.

(*c*) কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে।

(*d*) ABC ত্রিভুজের C বিন্দুতে একটি সমকোণ। C হইতে অতিভুজ AB-এর উপর CD লম্ব অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে $CD^2 = AD.DB$.

8. (*a*) Same as Q. 8(*a*) of S. F. 1971.

(*b*) Same as Q. 7(*a*) of S. F. 1967.

School Final Examination, 1973
ADDITIONAL MATHEMATICS

1. যে কোন দুইটির উত্তর কর :—

(a) ভাগশেষ-বিষয়ক সাধারণ উপপাদ্যটি লিখ এবং উহা প্রমাণ কর।

(b) নিম্নলিখিত রাশির উৎপাদকগুলি নির্ণয় কর :

$x^3+7x^2-21x-27$ [উ: $(x+1)(x+9)(x-3)$]

(c) সমাধান কর : $4.3^{x+1}=27+9^x$. [উ: $x=2$ বা 1]

2. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(a) সমাধান কর :

$\sqrt{x^2+11x+20}-\sqrt{x^2+5x-1}=3.$ [উ: $x=5$]

(b) $4a^4-12a^3-7a^2+23a+14$-এর সহিত $pa+q$ যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ হইবে। p এবং q-এর মান বাহির কর। [উ: $p=1, q=12$]

(c) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x অপনয়ন কর :

$x^3+\frac{3}{x}=4(a^3+b^3),\ 3x+\frac{1}{x^3}=4(a^3-b^3).$ [উ: $a^2-b^2=1$]

3. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(a) $x^2+xy=15,\ x-y=1$ সমীকরণ দুইটি সমাধান কর।

[উ: $x=3, y=2$, বা $x=-\frac{5}{2}, y=-\frac{7}{2}$]

(b) $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots\ldots$ শ্রেণীর কোন্ পদ $\frac{1}{243}$? [উ: অষ্টম পদ]

(c) 2^{67} সংখ্যাটির মান কত অঙ্কবিশিষ্ট এবং 2^{-37} সংখ্যাটির মানে দশমিক বিন্দুর পর প্রথম সার্থক অঙ্কের পূর্বে কতগুলি শূন্য আছে তাহা নির্ণয় কর। (দেওয়া আছে : $\log 2=\cdot 30103$). [উ: 21, 11টি]

4. $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কন কর। লেখ হইতে $x^2+y^2-10x-10y+25=0$, $x=0$, এই সমীকরণ দুইটি সমাধান কর।

অথবা, একখানি নৌকা 10 ঘণ্টায় নদীর উজানের দিকে 30 মাইল যাইয়া ভাঁটির দিকে 44 মাইল যাইতে পারে। আবার 13 ঘণ্টায় উজানের দিকে 40 মাইল যাইয়া ভাঁটির দিকে 55 মাইল যাইতে পারে। স্রোতের এবং নৌকার গতিবেগ নির্ণয় কর। [উ: ঘণ্টায় নৌকা 8 ও স্রোত 3 মাইল ;]

5. যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(a) (i) $\sin A+\sin^2 A=1$ হইলে প্রমাণ কর যে

$$\cos^2 A+\cos^4 A=1$$

(ii) A একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ। যদি $4 \sin A=\text{cosec } A$ হয়, তবে A-এর মান নির্ণয় কর। [উ: 30°]

(b) (i) $\sec 60°$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) প্রমাণ কর যে $\sin (90°-\theta)=\cos \theta$.

(c) একটি সরল পথের ঠিক উপরের দিকে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে ঐ পথের উপর অবস্থিত এক কিলোমিটার ব্যবধানে দুইটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° ও 45° ; পথ হইতে ঐ বিন্দুর সম্ভাব্য উচ্চতাগুলি নির্ণয় কর।

[উ: 1·37 বা ·37 কি. মি.]

6. (a) এবং যে কোন একটি উত্তর কর :

(a) দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি, কোন সমতলের উপর লম্ব হইলে, প্রমাণ কর যে অপরটিও ঐ একই সমতলের উপর লম্ব হইবে।

(b) একটি সরল রেখার সমান্তরাল হইয়া কতকগুলি সরল রেখা উহার চতুর্দিকে অবস্থিত হইলে প্রমাণ কর যে তাহারাও পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

(c) 8 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট স্বর্ণগোলক দ্বারা এমন একটি লম্ব বৃত্তীয় নিরেট শঙ্কু নির্মিত হইল যাহার ভূমির ব্যাস 16 সে. মি.। শঙ্কুটির উচ্চতা নির্ণয় কর। [উ: 32 সে. মি.]

7. (a) এবং (b) অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) প্রমাণ কর যে দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের যে কোন অনুরূপ বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

(b) AD, ABC ত্রিভুজের মধ্যমা। ∠ADB এবং ∠ADC কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডকদ্বয় AB এবং AC বাহুদ্বয়ের সহিত যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে EF, BC-এর সমান্তরাল।

(c) কোন সরল রেখা একটি বৃত্তকে যে কোন বিন্দুতে স্পর্শ করিলে এবং ঐ স্পর্শবিন্দু হইতে কোন জ্যা অঙ্কিত হইলে, ঐ জ্যা স্পর্শক সরল রেখাটির সহিত যে কোণদ্বয় উৎপন্ন করে প্রমাণ কর যে তাহারা যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণদ্বয়ের সমান হইবে।

(*d*) প্রমাণ কর যে একটি বৃত্তের কোন জ্যা AB, A বিন্দুগামী ব্যাস ও A হইতে B বিন্দুতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বারা নির্মিত কোণের দ্বিখণ্ডক।

৪. (*a*) দুইটি নির্দিষ্ট পরস্পরচ্ছেদী অসমান বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।

(*b*) কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ পরিলিখিত কর।

(উভয় ক্ষেত্রে অঙ্কন ও প্রমাণ দিতে হইবে)

School Final Examination—1974

ADDITIONAL MATHEMATICS

1. যে কোন **দুইটির** উত্তর কর :

(*a*) নিম্নলিখিত রাশির উৎপাদকগুলি নির্ণয় কর :

$8a^3+18a^2b-27ab^2-27b^3$ [উঃ $(a+3b)(2a-3b)(4a+3b)$]

(*b*) নিম্নলিখিত রাশিটির বর্গমূলগুলি নির্ণয় কর :

$\frac{x^3}{16}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{x}{9}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{1}{4}$ [উঃ $\pm\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{4}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}-\frac{1}{2}\right)$]

(*c*) $x=7+4\sqrt{3}$ হইলে $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[দেওয়া আছে যে $\sqrt{x}>0$], [উঃ $2\sqrt{3}$]

2. যে কোন **দুইটির** উত্তর কর :—

(*a*) x-এর মান 6 হইলে, ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে

$4x^4-21x^3-19x^2+7x+19$-এর মান নির্ণয় কর। [উঃ 25]

(*b*) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 26 সে. মি. এবং অপর দুইটির বাহুর সমষ্টি 34 সে. মি.। ত্রিভুজটির অপর দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[উঃ 24 সে. মি., 10 সে. মি.]

(*c*) সমাধান কর : $2y^2-3x=y+9$; $2x+3y=4$

[উঃ $x=-1, y=2$, or, $x=\frac{61}{8}, y=-\frac{15}{4}$]

3. যে কোন **দুইটির** উত্তর কর :

(*a*) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x এবং y অপনয়ন কর :

$x+y=l$, $x^2+y^2=m$ এবং $x^3+y^3=n$. [উঃ $l^3-3lm+2n=0$]

(*b*) কোন সমান্তর শ্রেণীর পঞ্চম ও অষ্টম পদ যথাক্রমে $7\frac{1}{2}$ এবং 15 হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর। [উ: $-\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}, 5, \cdots$]

(*c*) $\log 2 = 0{\cdot}30103$, $\log 3 = 0{\cdot}47712$, হইলে, $6^{3-4x}.\, 4^{x+5} = 8$, সমীকরণটি হইতে x-এর মান নির্ণয় কর। (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

[উ: 1·77 (প্রায়)]

4. লেখ সাহায্যে $2x^2 - 5x - 12 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

অথবা, তিন অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কত্রয়ের সমষ্টি 6 ; দশকের ঘরের অঙ্কটি এককের ঘরের অঙ্কটি অপেক্ষা যত বড় শতকের ঘরের অঙ্কটি অপেক্ষা তত ছোট। সংখ্যাটি হইতে 198 বিয়োগ করিলে উহার অঙ্কত্রয় উল্টাইয়া যাইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [উ: 321]

5. (*a*) এবং যে কোন একটির উত্তর কর :

(*a*) একটি পাহাড়ের চূড়া হইতে 100 ফুট উচ্চ একটি স্তম্ভের শীর্ষ ও পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60°। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর। [উ: 150 ফুট]

(*b*) (i) ঋণাত্মক কোণ বলিতে কি বুঝায় ব্যাখ্যা কর।

প্রমাণ কর যে $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ এবং $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

(ii) প্রমাণ কর যে

$$\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A.$$

(*c*) (i) $\sec^2 35° - \cot^2 55°$এর মান নির্ণয় কর। [উ: 1]

(ii) সমাধান কর : $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0, 0° < \theta < 180°$.

[উ: $\theta = 120°$]

6. (*a*) এবং যে কোন একটির উত্তর কর :

(*a*) একটি সরলরেখা, দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখার ছেদবিন্দুতে উহাদের প্রত্যেকটির উপর লম্ব হইলে প্রমাণ কর যে ঐ সরলরেখা উক্ত পরস্পরছেদী সরল রেখাদ্বয়ের ধারক সমতলের উপরও লম্ব হইবে।

(*b*) এক সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ ডেকামিটার 24 বর্গমিটার এবং উহার উচ্চতা ভূমির ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। উহার উচ্চতা কত?

[$\pi = \frac{22}{7}$] [উ: 14 মি.]

(*c*) প্রমাণ কর যে একটি সমতলের উপরিস্থ অথবা বহিঃস্থ কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া উহার উপর কেবলমাত্র একটি লম্ব অঙ্কন করা যাইতে পারে।

7. (*a*) এবং (*b*) অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হইলে, উহাদের অনুরূপ বাহু দুইটিও পরস্পর সমানুপাতী।

(*b*) $ABCD$ একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। বর্ধিত AB এবং DC বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, $PB : PD = PC : PA$.

(*c*) সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কিত হইলে, প্রমাণ কর যে উক্ত লম্বের উভয় পার্শ্বস্থ ত্রিভুজ দুইটি পরস্পর এবং মূল ত্রিভুজের সহিত সদৃশ।

(*d*) প্রমাণ কর যে দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি অনুরূপ বাহুগুলির সমানুপাতী।

8. (*a*) দুইটি বৃত্তের তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর।

(*b*) প্রদত্ত আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। (উভয় ক্ষেত্রে অঙ্কন ও প্রমাণ দিতে হইবে।)

SECONDARY EXAMINATION—1976

Additional Mathematics

1. যে কোন **দুইটির** উত্তর কর :—

(*a*) $2x^3 - px^2 - 11x + q$ রাশিমালাটি $x+2$ এবং $2x-1$ দ্বারা বিভাজ্য। ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে p ও q নির্ণয় কর।

[উঃ। $p=3, q=6$]।

(*b*) মান নির্ণয় কর :

(i) $16^{\circ} \times 16^{-\frac{3}{4}}$; (ii) $27^{\frac{1}{3}} \div 16^{-\frac{3}{2}}$.

[উঃ (i) $\frac{1}{8}$; (ii) 192]।

(*c*) $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ হইলে প্রমাণ কর যে

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

2. যে কোন **দুইটির** উত্তর কর :

(*a*) নিম্নলিখিত রাশির উৎপাদকগুলি নির্ণয় কর :

$(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. [উঃ $(a+b)(b+c)(c+a)$]।

(*b*) সমাধান কর :— $\frac{3}{x} = 7 - 3x$. দুই দশমিক ঘর পর্যন্ত শুদ্ধ উত্তর দাও।

[উঃ $x = 1·77$ বা ·5]।

(c) মান নির্ণয় কর : $\log_{10}.75+\log_{10}28-\log_{10}21$ [উ: 0]

3. যে কোন দুইটির উত্তর কর :—

(a) সমাধান কর : $x=2y-1$, $x^2-y^2=16$

[উ: $x=5, y=3$; অথবা $x=-\frac{13}{3}, y=-\frac{5}{3}$]

(b) একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 64 এবং সাধারণ অনুপাত r, প্রথম ও চতুর্থপদের গড় 140 হইলে r নির্ণয় কর। [উ: $r=\frac{3}{2}$]

(c) দুইটি বালকের ওজনের অনুপাত 14 : 13। প্রথম বালকের ওজন $12\frac{1}{2}\%$ বাড়িলে এবং দ্বিতীয় বালকের ওজন 8 কিলোগ্রাম বাড়িলে উহাদের ওজনের অনুপাত হয় 9 : 8। বালক দুইটির প্রাথমিক ওজন নির্ণয় কর।

[উ: প্রথম বালকের ওজন 112 কি. গ্রা., দ্বিতীয়ের ওজন 104 কি. গ্রা]

4. x-এর মান 0 হইতে +6 পর্যন্ত লইয়া $y=(x-1)(x-6)$ লেখ চিত্রটি অঙ্কন কর। x অক্ষ বরাবর এক সেন্টিমিটার এক একক ধরিবে এবং y অক্ষ বরাবরও এক সেন্টিমিটার এক একক ধরিবে।

লেখচিত্রটি হইতে, নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে,

(i) $(x-1)(x-6)$-এর বৃহত্তম মান নির্ণয় কর ;

(ii) x-র দুইটি মান নির্ণয় কর যাহাতে $y=-6$ হয়।

[উ: (i) 6 একক (ii) $x=4$ ও 3 একক]

5. (a) এবং যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(a) সমুদ্রের 7200 ফুট উপরে একটি বেলুন হইতে দুইটি যুদ্ধপোতের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 45° পরিলক্ষিত হইল। একটি যুদ্ধপোত বেলুনটির পূর্বদিকে এবং অপরটি দক্ষিণ দিকে হইলে যুদ্ধপোত দুইটির মধ্যে দূরত্ব কত ?

[উ: 14400 ফুট]

(b) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞা হইতে প্রমাণ কর যে,

(i) $\sec^2 A=1+\tan^2 A$

(ii) $(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\cos A$

(c) $A=B=30°$, প্রমাণ কর যে,

(i) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(ii) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(*d*) $0<\theta\angle 180^\circ$ এবং $\sec\theta\ \tan\theta=2\sqrt{3}$ হইলে θ-র মানগুলি নির্ণয় কর। [উঃ $\theta=60^\circ, 120^\circ$]

6. (*a*) এবং (*b*) অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র, উহার অপর দুই বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রদ্বয় এবং ঐ বাহুদ্বয়ের একটি বাহু ও উহার উপর অপর বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

(*b*) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC-এর শীর্ষবিন্দু A হইতে অঙ্কিত AX সরলরেখা BC ভূমিকে অন্তঃস্থভাবে X বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে—

$$Ax^2=Ac^2-Bx.xc.$$

(*c*) কোন সরলরেখা একটি বৃত্তকে যে কোন বিন্দুতে স্পর্শ করিলে এবং ঐ স্পর্শবিন্দু হইতে কোন জ্যা অঙ্কিত হইলে প্রমাণ কর যে ; ঐ জ্যা স্পর্শক সরলরেখাটির সহিত যে কোণদ্বয় উৎপন্ন করে, তাহারা যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণদ্বয়ের সমান হইবে।

(*d*) PQ একটি বৃত্তের জ্যা এবং AB ব্যাস উহার উপর লম্বভাবে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে AP ও BP রেখাদ্বয় PQ ও P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দ্বারা উৎপন্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক হইবে।

7. (*a*) দুইটি অসমান বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত কর, (কেন্দ্র বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধের সমষ্টির চেয়ে বেশী)।

(*b*) একটি 3 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। (উভয় ক্ষেত্রে অঙ্কন ও প্রমাণ দিতে হইবে)

8. (*a*) এবং যে কোন একটির উত্তর কর :

(*a*) একটি সরলরেখা, দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার ছেদ বিন্দুতে উহাদের প্রত্যেকটির উপর লম্ব হইলে প্রমাণ কর যে ঐ সরলরেখা উক্ত পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখাদ্বয়ের ধারক সমতলের উপরও লম্ব হইবে।

(*b*) একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এরূপ তিনটি বিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত একটি বিন্দুর ত্রিমাত্রিক সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(*c*) বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট একটি পিরামিডের প্রত্যেক ধার 100 ফুট দীর্ঘ। সমঘনফল বিশিষ্ট একটি ঘনকের ধারের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[log 2='3010 ; log 3='4771 ; log 61'77=1'7908] [উঃ 61'77 ফুট]

⊕	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	16	20	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	18	22	26	29	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	6	10	13	16	19	23	26	29
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	14	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1647	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	6	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	13	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	3	5	8	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	17	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	4	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	5	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0 1 1	1 2 2	2 2 3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0 1 1	1 2 2	2 2 3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0 1 1	1 2 2	3 3 3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0 1 1	1 2 2	3 3 3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0 1 1	2 2 2	3 3 3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0 1 1	2 2 2	3 3 3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0 1 1	2 2 3	3 3 4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0 1 1	2 2 3	3 3 4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1 1 2	2 3 3	4 5 5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1 1 2	2 3 4	4 5 5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1 1 2	2 3 4	4 5 5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1 1 2	2 3 4	4 5 6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1 1 2	3 3 4	4 5 6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1 1 2	3 3 4	4 5 6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1 1 2	3 4 4	5 6 6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1 1 2	3 4 4	5 6 6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

শুদ্ধিপত্র

148 পৃষ্ঠায়	Exercise	5নং প্রশ্নে প্রথম 'ত্রিভুজ' স্থানে 'বৃত্তে' হইবে।
163 ,,	,,	1এর 5(ii)নং অঙ্কে $4''$ স্থানে $40''$ হইবে।
202 ,,	,,	6এর 1নং উত্তরে 9 স্থানে 16 হইবে।
203 ,,	,,	8এর 8(ii)এর উত্তর হইবে 7·26 এবং 12(a)এর উত্তর হইবে 15.
204 ,,	,,	9এর 45 (ii)এর উত্তর $\sqrt[4]{3}\,(\sqrt{3}-1)$ হইবে।
206 ,,	Exercise	1এর 19নং স্থানে 18 এবং 20নং স্থানে 21নং হইবে; আর Exercise 3এর 1নং উত্তরে প্রথম $\sin\theta$-র পর = চিহ্ন হইবে।
224 ,,		8নং অঙ্কে 'বর্গফুটে' স্থানে 'বর্গমিটারে' হইবে।
226 ,,		উদা. 1এর (2) নম্বরে $104\frac{2}{7}$ স্থানে $204\frac{2}{7}$ হইবে।
265 ,,		27নং অঙ্কে xrp স্থানে yrp এবং xpq স্থানে zpq হইবে; এবং 32নং অঙ্কের শেষছত্রে "সমষ্টির r গুণের অর্ধেক" হইবে।
301 ,,		4(ii)নং অঙ্কে $\frac{75}{15}$ স্থানে $\frac{75}{16}$ হইবে।
302 ,,		14নং অঙ্কের প্রথমেই log কথাটি বসিবে।
331 ,,		উদা. 1এর 12 ছত্রে $\triangle$AED ও $\triangle$ABC স্থানে $\triangle$ABD ও $\triangle$AEC হইবে।
333 ,,		5 ছত্রের শেষে BD.AD স্থানে BC.AD হইবে; এবং 17 ছত্রে $\frac{AB}{CE}$ স্থানে $\frac{AE}{CE}$ হইবে।
353 ,,	Exercise	2এর 5নং উত্তরে ফু. স্থানে মি. হইবে; এবং
	,,	5এর 5নং উত্তরে মি. স্থানে ফু. হইবে।
357 ,,	Exercise	11-র 2(vii)নং উত্তর ·001495 হইবে।

C. I. E. STUDIES
IN
EDUCATION AND PSYCHOLOGY

Publication No. 57

SUMMARIES OF REPORTS

Submitted by the Students
for the
Degree of Master of Education
1963–64

CENTRAL INSTITUTE OF EDUCATION
(NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH & TRAINING)
DELHI
1966